

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**Tests de bondad de ajuste basados en
la distribución empírica para datos
con y sin censura**

Autor: Lic. Claudia Adriana Castro Kuriss

Directoras: Dra. Diana Mabel Kelmansky
Dra. Elena Julia Martínez

**Tesis para optar al título de Magíster en Estadística
Matemática**

Versión: Junio 2007

Agradecimientos

Un viaje de 1000 millas debe comenzar con el primer paso.
Lao-Tzu

El comienzo es la mitad de cada acción
Platón

Every noble work is at first imposible
Thomas Carlyle

Qué difícil se me hace, cargar todo este equipaje....Todo a pulmón
Alejandro Lerner

Estas frases resumen lo que ha significado para mi durante todos estos últimos años, la aprobación de las materias del master y el trabajo de tesis.

Cada paso significó un esfuerzo que pese a parecer inalcanzable e inabordable en un inicio, finalmente fue entendido y pasado con el reconocimiento de las mejores notas.

Por eso mi agradecimiento va en primer lugar a los que hicieron esto posible: mis directoras de tesis, las Dras. Elena Martínez y Diana Kelmansky que me alentaron en cada paso, me recordaron la primera frase y recomendaron paciencia para mi ansiedad. En segundo término, a todos los profesores del master pero en particular a los Dres. Víctor Yohai y Graciela Boente Boente que han sido un especial estímulo para el estudio. También quiero agradecer a mis compañeros de carrera, a mis compañeros y jefes de mis trabajos por su aliento, a mis amigos por su entusiasmo y calidez, a Alejandra, Martita y mi hijo Nico que me ayudaron con las tablas, a Liliana Valenti quien siempre creyó en mí.

Pero sobretodo el agradecimiento va para mi familia: mis padres, mi hermano y mi cuñada quienes consiguieron el material para que finalizara mi trabajo, Jorge, mi compañero en el camino y mis hijos Nicolás e Ignacio, cuyo cariño, bondad y generosidad llena de besos me permite continuar caminando y conservar la fe de que con paciencia todo es posible.

En fin, agradezco a todos los que de un modo u otro me han ayudado a finalizar esta etapa, este "never-ending, seeming unlikely ever to stop, continuing on and on" que tanta energía me ha demandado.

Índice General

	Pág.
Resumen.....	5
Abstract.....	6
Introducción.....	7
Capítulo 1. Análisis gráficos.	
1.1 Introducción.....	14
1.2. Función de distribución empírica.....	15
1.3. Gráficos.....	16
1.3.1 Gráfico QQ	17
1.3.2 Gráfico PP	20
1.3.3 Gráfico DSP	21
Capítulo 2. Tests de bondad de ajuste a una distribución completamente especificada.	
2.1 Introducción.....	25
2.2 Estadísticos del supremo.....	26
2.3 Test K-S para una distribución especificada.....	27
2.4 Bandas de confianza.....	28
2.5 Test DSP para una distribución especificada.....	29
2.6 Bandas de confianza.....	30
2.7 Bandas de aceptación utilizando D y DSP	31
2.8 Ejemplos.....	35
2.9 Potencia de los tests planteados.....	41
Capítulo 3. Tests de bondad de ajuste para una distribución completamente especificada en el caso de Muestras censuradas.	
3.1 Muestras censuradas.....	51
3.2 Tests de bondad de ajuste para muestras censuradas...	55
3.3 Bandas de aceptación de los tests 3.2.....	60
3.4 Potencia de los tests 3.2.....	64
3.5 Ejemplos de aplicación.....	67
Capítulo 4. Tests para la familia normal con parámetros desconocidos.	
4.1 Introducción y definiciones.....	77
4.2 Tests basados en D y en DSP	78
4.3 Bandas de aceptación.....	80
4.4 Ejemplos de aplicación.....	80

4.5 Potencia de los tests 4.2.....	85
Capítulo 5. Tests de bondad de ajuste a una distribución normal con parámetros desconocidos en el caso de muestras censuradas	
5.1 Introducción.....	87
5.2 Estimadores de máxima verosimilitud.....	87
5.3 Estimadores lineales.....	98
5.4 Eficiencia relativa de los estimadores.....	101
5.5 Ejemplos de aplicación.....	103
5.6 Tests para el caso de muestras con censura.....	108
5.7 Bandas de aceptación.....	111
5.8 Potencia de los tests 5.6.....	112
5.9 Ejemplos de aplicación.....	115
Conclusiones y futuras investigaciones.....	124
Apéndice 1. Tablas de percentiles.....	126
Apéndice 2. Programas de computación.....	156
Programas de computación para Capítulo 2.....	157
Programas de computación para Capítulo 3.....	163
Programas de computación para Capítulo 4.....	167
Programas de computación para Capítulo 5.....	172
Apéndice 3. Conjuntos de datos.....	187
Referencias bibliográficas.....	189

Resumen

En la presente tesis se estudian y extienden dos tests de bondad de ajuste basados en la distribución empírica: el conocido test de Kolmogorov-Smirnov y el test propuesto por Michael (1988) basado en el denominado estadístico DSP. El principal objetivo de estudio es extender estos tests a muestras con censura simple de tipo I y de tipo II. Se considera inicialmente, bajo la hipótesis nula, una distribución completamente especificada y luego una distribución normal con parámetros desconocidos. En este último caso, se discute la estimación de los parámetros de la distribución bajo H_0 para muestras con censura y se establecen los problemas numéricos que surgen cuando se hallan estos estimadores. Específicamente, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud y de Gupta (1952) para muestras con censura simple de una distribución normal. Se derivan bandas de confianza para los gráficos cuantil versus cuantil (QQ), probabilidad versus probabilidad (PP) y DSP de Michel, mediante las cuales es posible detectar cuándo se rechaza la hipótesis nula y cuáles son los datos que contribuyeron a esa decisión. También, se estudia mediante simulaciones de Monte Carlo la distribución de los tests bajo la hipótesis nula y se calculan algunos percentiles de esta distribución. Además, se estima y compara la potencia de los tests propuestos mediante simulaciones de Monte Carlo y se presentan diversos ejemplos ilustrativos como aplicación.

Abstract

In this thesis, two tests of goodness of fit based on the empirical distribution are studied and extended: the well-known test of Kolmogorov-Smirnov and the test proposed by Michael in 1983, based on the so called statistic *DSP*.

The main purpose of the study is to extend these tests to singly censored samples of type I and type II. Initially a completely specified null distribution is considered and then the case of a normal distribution with unknown parameters.

In the latest case, the estimation of the parameters of the null distribution for censored samples is discussed and the parameters of the distribution for censored samples are estimated establishing the numerical problems that arise when these estimates are found.

The maximum likelihood estimators and also Gupta estimates for singly censored samples from the normal population are obtained. Confidence bands for the *PP*-plot, *QQ*-plot, and *DSP*-plot are derived, which allow visualizing when rejecting the null hypothesis, which data contribute to this decision.

By Monte Carlo methods, the distribution of the tests statistics under the null hypothesis is studied, and tables of quantiles are provided.

The power of the tests is also estimated and compared by Monte Carlo simulations too and several illustrative examples are presented as application.

The power of the tests is also estimated and compared by Monte Carlo simulations too and several illustrative examples are presented as application.

Introducción

En muchos problemas de bondad de ajuste se hace uso de tests de hipótesis sobre una distribución desconocida que se supone es la que siguen los datos asociados a una(s) variable(s) aleatoria(s). Por ejemplo: "los datos siguen una distribución es uniforme en el intervalo $(0,1)$ " o bien "la distribución de los datos pertenece a la familia normal". Por esta razón, estos tests se denominan de bondad de ajuste.

Pearson (1900) fue el que introdujo uno de los primeros y más populares tests de bondad de ajuste: el test chi-cuadrado. La idea de Pearson consiste en comprobar, haciendo uso de una distribución multinomial, si el número de observaciones en cada una de las categorías de una variable es coherente con el número esperado de observaciones en su respectiva categoría bajo la hipótesis nula. Más adelante, Kolmogorov (1933) propuso otro test de bondad de ajuste basado en una distancia entre la distribución empírica y la distribución hipotética. Este test resulta más potente que el de Pearson y además permite, como se verá más adelante, trazar una banda de confianza para la distribución desconocida. Posteriormente Smirnov (1939) presentó la versión del test de Kolmogorov para comparar la distribución de dos muestras independientes. Los dos tests mencionados se conocen actualmente como tests de Kolmogorov-Smirnov (KS) para una y dos muestras respectivamente.

Kolmogorov (1933) halló la distribución asintótica del estadístico en el cual se basa su test, que fue tabulada por Smirnov (1948). La distribución exacta de este estadístico para muestras pequeñas fue estudiada por Wald y Wolfowitz (1939). Birnbaum (1953), Shapiro, Wilk y Chen (1968) y Knott (1970) realizaron diferentes estudios de la potencia del test KS.

Otro conocido test de bondad de ajuste es el de Cramer-von Mises que fue desarrollado por Cramer (1928), von Mises (1931) y Smirnov (1936) y cuya distribución asintótica fue estudiada por Anderson y Darling (1952). Tablas con los percentiles de la distribución exacta para muestras finitas del estadístico de Cramer-von Mises, W^2 , fueron presentadas por Stephens y Maag (1968). También se han definido los estadísticos A^2 , o de Anderson-Darling (1954) y U^2 de Watson (1961), denominados de tipo cuadrático. Los tests basados en estos

estadísticos, a diferencia de lo que ocurre con el test KS, no permiten la posibilidad de obtener una representación gráfica.

Un nuevo test de bondad de ajuste para una distribución completamente especificada basado en la distribución empírica fue propuesto por Michael (1983), quien propuso también un gráfico basado en el estadístico de dicho test (*DSP*). Michael (1983) calculó por simulación los percentiles de la distribución del estadístico *DSP* bajo H_0 para algunos tamaños de muestra finitos y comparó la potencia del test basado en *DSP* con la del test KS para ciertas hipótesis alternativas.

Stephens (1974) comparó la potencia de los estadísticos A^2 , W^2 , U^2 , W de Shapiro-Wilk (1965) y D de Kolmogorov para las mismas alternativas estudiadas por Michael (1983).

El test de bondad de ajuste KS se utiliza para probar si una muestra aleatoria proviene de una distribución completamente especificada, es decir, tanto la familia a la cual pertenece la distribución como sus parámetros son conocidos. El test chi-cuadrado de Pearson es flexible en tanto permite la estimación de los parámetros a partir de la muestra, perdiendo un grado de libertad por cada parámetro estimado, pero requiere un agrupamiento adecuado de los datos. Por esta razón otros tests de bondad de ajuste han sido propuestos, sobre todo para probar distribuciones con parámetros desconocidos y que aparecen con frecuencia en la práctica, tales como las distribuciones normal, exponencial o Weibull.

El test KS ha sido modificado para ser utilizado cuando la distribución hipotética depende de parámetros desconocidos. El estadístico del test en sí no se modifica, lo que se modifica es la distribución del estadístico bajo la hipótesis nula, al ser estimados los parámetros, y por lo tanto, las tablas de los correspondientes percentiles. Estas tablas difieren según la familia de distribuciones y se deben calcular para cada distribución considerada en H_0 .

En el caso de una distribución que no está completamente especificada, la hipótesis nula resulta una hipótesis compuesta, ya que ahora la hipótesis planteada es que la distribución pertenece a una familia de distribuciones como por ejemplo, la familia normal.

La primera modificación al test KS fue realizada para probar la hipótesis de normalidad pero con parámetros desconocidos. El primero en presentar este test fue Lilliefors (1967), quien calculó los percentiles de la distribución del estadístico del test bajo H_0 mediante simulación para tamaños de muestra desde 4 hasta 30. Para tamaños de muestra mayores que 30, Lilliefors conjeturó que la distribución del estadístico bajo H_0 se aproximaba a su distribución asintótica como función de la raíz cuadrada del tamaño muestral. Estudios posteriores de simulación basados en 20000 replicaciones para cada tamaño muestral para el test planteado por Lilliefors, fueron realizados por Mason y Bell (1986).

Lilliefors también comparó la potencia del test que propuso en el caso de que la distribución bajo H_0 fuera normal de parámetros desconocidos con la potencia del test chi-cuadrado para varias hipótesis alternativas. Él encontró que su test era más potente en todos los casos que reportó. La distribución exacta del estadístico bajo H_0 en el test de Lilliefors resulta desconocida (Conover, 1999, página 444).

También Michael (1983) presentó una modificación del test basado en *DSP* para ser utilizado en el caso en que la distribución hipotética sea normal con parámetros desconocidos. Michael (1983) obtuvo por simulación mediante 1000 replicaciones y para algunos tamaños de muestra, una tabla de los percentiles de la distribución del estadístico *DSP*. La distribución exacta de este estadístico bajo H_0 también resulta desconocida hasta donde se ha podido investigar.

Los percentiles de la distribución bajo la hipótesis nula de los estadísticos W^2 , U^2 y A^2 modificados para el caso de la distribución normal con parámetros desconocidos, fueron estudiados mediante simulación por Pearson y Hartley (1972), Stephens (1971, 1974, 1976), Durbin, Knott y Taylor (1975) y Martynov (1976).

El test KS para una distribución completamente especificada se ha extendido también al caso de muestras con observaciones censuradas. En este caso, el estadístico se modifica para considerar los casos de muestras con censura de tipo I y de tipo II.

Barr y Davidson (1973) y Dufour y Maag (1978) obtuvieron mediante métodos de simulación, tablas de percentiles de la distribución bajo H_0 de los estadísticos tipo KS para realizar los tests de bondad de

ajuste para una distribución completamente especificada, en el caso de muestras con observaciones censuradas y para tamaños de muestra menores que 25. Para ambos tipos de censura, las distribuciones de los estadísticos bajo H_0 convergen a una única distribución que fue estudiada por Koziol y Byar (1975). También Dufour y Maag (1978) han obtenido fórmulas que permiten utilizar la distribución asintótica incluso en el caso de muestras finitas.

Los estadísticos del tipo de Cramer-von Mises también han sido modificados para considerar los casos de muestras con datos censurados. Pettitt y Stephens (1976) fueron los que introdujeron las versiones de los estadísticos de Cramer-von Mises, Watson y Anderson-Darling para datos con censura a la derecha. Los percentiles de las distribuciones de estos estadísticos bajo la hipótesis nula y para tamaños de muestra pequeños, fueron obtenidos por simulación por Pettitt y Stephens (1976) y tablas más extensas fueron obtenidas por Stephens (1986).

Estudios comparativos de la potencia de los estadísticos de Cramer-von Mises, Watson y Anderson-Darling para datos censurados fueron realizados por Michael y Schucany (1979) quienes encontraron que en general, para los tamaños de muestra y las proporciones de censura consideradas, el estadístico modificado de Anderson-Darling resultó ser el de mayor potencia.

El test de bondad de ajuste para la distribución normal con parámetros desconocidos también ha sido modificado para contemplar el caso en que la muestra presenta datos censurados. En este caso hay que estimar los parámetros desconocidos a partir de dicha muestra. Si bien estas estimaciones se pueden realizar mediante el método de máxima verosimilitud, los estudios que se han realizado están basados en las estimaciones lineales desarrolladas por Gupta (1952). Ali y Chan (1964) probaron que las estimaciones de Gupta (1952) resultan asintóticamente eficientes.

Percentiles de la distribución bajo la hipótesis nula de los estadísticos modificados W^2 y A^2 basados en estimaciones de Gupta de los parámetros fueron obtenidos por Pettitt (1976) y la de U^2 por Stephens (1986) para el caso de muestras con censura de tipo 2 a derecha. Estos estudios fueron realizados mediante simulaciones de

Monte Carlo basadas en 10000 replicaciones para cada tamaño muestral.

Ahmed y Hala (2005) propusieron modificaciones a los estadísticos W^2 y A^2 para realizar el test de bondad de ajuste a una distribución normal con parámetros desconocidos para el caso de muestras con datos censurados a derecha de tipo II. Estos autores emplearon estimaciones de Gupta de los parámetros y obtuvieron mediante simulación los percentiles de la distribución bajo H_0 para cada uno de los estadísticos que proponen. Las simulaciones fueron realizadas en base a 10000 muestras para cada tamaño muestral en un rango de 10 a 60 con paso 10 y para una proporción de censura fija en 0.6. También realizaron un estudio comparativo de potencia entre los estadísticos que propusieron, estableciendo que, en los casos considerados, el estadístico modificado de Anderson-Darling resultó con potencia mayor.

No se han encontrado otros trabajos que aborden el problema de bondad de ajuste para la distribución normal con parámetros desconocidos en el caso de muestras con censura y que utilicen además estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros. Stephens (1986, página 128) indica que estas estimaciones son complicadas de obtener.

Uno de los objetivos de esta tesis es proponer un nuevo estadístico basado en el de Michael para realizar el test de bondad de ajuste para una distribución completamente especificada en el caso de muestras con censura y comparar la potencia del test propuesto con la del test KS.

Debido a que en toda la bibliografía analizada los diferentes tests de bondad de ajuste a la distribución normal con parámetros desconocidos en el caso de muestras con observaciones censuradas emplean estimaciones de Gupta, se proponen estadísticos modificados de tipo KS y basados en *DSP* empleando tanto estimaciones de máxima verosimilitud como de Gupta. Además, se estudia la eficiencia relativa de ambos estimadores.

Mediante simulación se estudian las distribuciones bajo la hipótesis nula de los estadísticos de tipo KS y basados en *DSP*, para

diferentes tamaños de muestra y proporciones de censura y se realiza un estudio comparativo de la potencia de ambos tests.

Otro de los objetivos de la presente tesis es obtener, a partir de los tests propuestos, bandas de confianza que permitan establecer si se rechaza o no la hipótesis nula y cuáles son las observaciones que contribuyen a la decisión.

Todos los gráficos desarrollados y los cálculos de los estadísticos, las estimaciones de máxima verosimilitud y de Gupta para los parámetros de una distribución normal en el caso de muestras con observaciones censuradas, se implementaron computacionalmente mediante el software estadístico S-plus.

La distribución normal es frecuentemente analizada desde la perspectiva de bondad de ajuste, incluso cuando se presentan datos censurados. Los tests propuestos también pueden emplearse para el caso en que la distribución hipotética sea lognormal como se verá en los Capítulos 4 y 5.

Un tercer objetivo de la tesis es validar y extender los resultados obtenidos por diferentes autores para los temas estudiados.

Los tests analizados y propuestos se aplican a ejemplos simulados y a datos obtenidos en la bibliografía existente sobre el tema.

Esta tesis está estructurada en 5 capítulos. En Capítulo 1 se introducen los gráficos *QQ*, *PP* y *DSP* que se utilizarán a lo largo de todo el trabajo. En Capítulo 2 se analizan los tests de bondad de ajuste para una distribución completamente especificada basados en los estadísticos KS y de Michael, se desarrollan las bandas de aceptación a partir de estos estadísticos y se compara la potencia de ambos tests. En Capítulo 3 se extienden los tests mencionados a muestras con observaciones censuradas. Se propone un estadístico basado en el *DSP* para desarrollar tests de bondad de ajuste a una distribución completamente especificada en el caso de muestras con observaciones censuradas. En Capítulo 4 se estudian los tests basados en los estadísticos KS y de Michael para la distribución normal con parámetros desconocidos y se compara la potencia de ambos tests. En Capítulo 5 se presentan nuevos tests de bondad de ajuste a una distribución normal con parámetros desconocidos en el caso de muestras censuradas. Se comienza por encontrar los estimadores de

máxima verosimilitud y de Gupta de los parámetros, analizando los problemas numéricos que pueden surgir en el proceso de estimación. En Capítulos 2, 3, 4 y 5 se presentan gráficos y bandas de aceptación de los tests planteados en cada caso como así también ejemplos de aplicación de los tests. Finalmente, en el apéndice se incluyen las tablas de percentiles de las distribuciones bajo la hipótesis nula de los estadísticos presentados a lo largo de los distintos capítulos, los programas desarrollados para realizar los gráficos y los conjuntos de datos empleados.

Capítulo 1

Análisis gráficos

1.1 Introducción

En los problemas de bondad de ajuste se pueden utilizar técnicas gráficas como herramientas que establezcan por simple inspección si la distribución de los datos puede provenir de la distribución teórica planteada.

Los gráficos en los problemas de bondad de ajuste se pueden emplear en dos sentidos:

- Como técnicas exploratorias, cuyo objetivo es poner de manifiesto características de los datos: simetría, presencia de datos atípicos, colas pesadas.
- Como complemento de técnicas analíticas, donde el objetivo es testear una hipótesis. El gráfico en este caso puede ayudar a identificar los puntos que contribuyen al rechazo de la hipótesis además de mostrar en forma descriptiva los alejamientos de la distribución hipotética y eventualmente indicar cuál podría ser una distribución adecuada.

Antes de mostrar las técnicas gráficas se define qué se entiende por parámetros de locación y escala para una variable aleatoria X .

Si $f(x; \mu, \sigma)$ es la función de densidad de una variable aleatoria X , entonces el parámetro μ es un parámetro de locación si la densidad se puede escribir como función de $x - \mu$ de modo tal que no dependa de μ , es decir, $f(x, \mu, \sigma) = h(x - \mu, \sigma)$ para alguna función h que no dependa de μ . Es inmediato a partir de la definición, que μ es un parámetro de locación para una variable aleatoria X si la distribución de $X - \mu$ no depende de μ . Por otro lado, σ es un parámetro de escala si la densidad se puede escribir en función de $\frac{x}{\sigma}$ de modo tal que no dependa de σ , es decir, $f(x; \mu, \sigma) = g(\frac{x}{\sigma}, \mu)$ para alguna función g que no dependa de σ .

1.2 Función de distribución empírica (FDE)

Dado que se desarrollarán tests de bondad de ajuste basados en la distribución empírica de los datos, se comienza por definirla.

Sea una muestra aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_N$ de tamaño N de una variable X , y $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ la muestra ordenada.

En todo el trabajo la suposición será que la función de distribución acumulada (FDA) de X , es continua y además que pertenece a una familia que depende de parámetros de locación y escala.

La FDE $F_N(x)$, se define como:

$$F_N(x) = \frac{\text{cantidad de observaciones} \leq x}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N I_{(-\infty, x]}(x_i)}{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$I_{(-\infty, x]}(x_i)$ denota la función indicadora de x_i en el intervalo $(-\infty, x]$.

Vale decir:

$$F_N(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < x_{(1)} \\ \frac{i}{N} & , \text{ si } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)} \quad i=1, 2, \dots, N-1 \\ 1 & , \text{ si } x \geq x_{(N)}. \end{cases}$$

Así $F_N(x)$ es una función escalonada que se calcula a partir de los datos y que en cada valor observado tiene un salto de altura $\frac{1}{N}$.

$F_N(x)$ es en sí una FDA, ya que corresponde a una FDA de una variable aleatoria uniforme discreta que toma valores $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)}$.

Para cada x , $F_N(x)$ establece la proporción de observaciones menores o iguales que x , mientras que $F(x)$ representa la probabilidad de obtener una observación menor o igual que x . Es decir que, para cada x , $N F_N(x) \sim Bi(N, p)$ donde $p = F(x)$.

Por lo tanto $F_N(x)$ es un estimador insesgado de $F(x)$ con varianza $\frac{F(x)(1-F(x))}{N}$. Más aun es un estimador con distribución

asintóticamente normal para cada x . Además para todo x , $F_N(x)$ converge a $F(x)$ en probabilidad. El teorema de Glivenko-Cantelli

asegura además que la convergencia es fuerte (Fisz, 1963, pág. 391). Por todo lo anterior $F_N(x)$ estima la verdadera distribución de los datos.

1.3 Gráficos

En Figura 1.1 se han graficado simultáneamente la FDE y la FDA de la distribución teórica hipotética. Este gráfico se realizó en S-plus basado en una muestra al azar de tamaño 20 de una distribución $N(0,1)$. La muestra utilizada se encuentra en Apéndice 2 y se denomina Muestra 1.

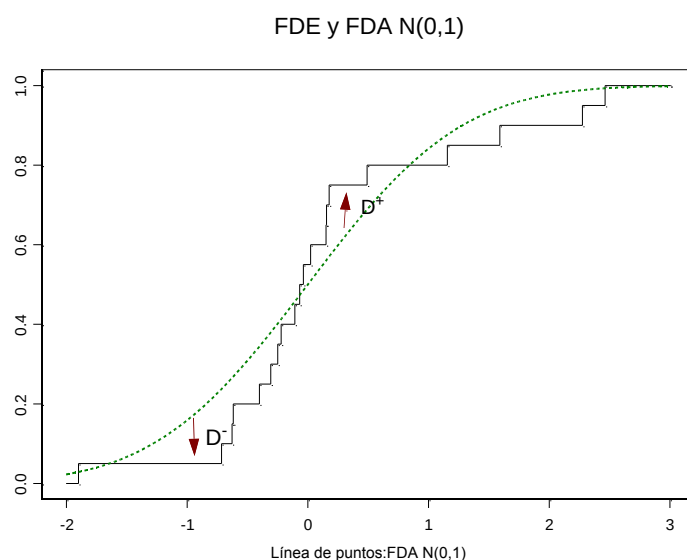


Figura 1.1. Gráfico de la FDE de una muestra de tamaño 20 de una distribución $N(0,1)$ y de la FDA $N(0,1)$. Se señalan las máximas distancias entre ambas curvas.

En general resulta muy difícil establecer visualmente cuán lejos o cuán cerca está la curva teórica de la empírica y determinar si razonablemente la distribución hipotética es la correcta.

En la Figura 1.1 se señalan las máximas distancias tanto por arriba (D^+) como por debajo de la distribución teórica (D^-). Sin embargo, no resulta claro si estas distancias son lo suficientemente "grandes" como para rechazar la hipótesis de que la muestra proviene de una distribución $N(0,1)$.

Más adelante se estudiará cómo establecer criterios que permitan rechazar o no la hipótesis nula mediante el desarrollo de un test de bondad de ajuste basado en las distancias que se han señalado.

Existen otras técnicas gráficas que se pueden emplear para determinar lo indicado anteriormente: las características de los datos y el apartamiento de la distribución hipotética.

Los gráficos que se utilizarán en este trabajo son tres: el *QQ*-plot, el *PP*-plot y el *DSP*-plot.

En lo que sigue $F_0(\cdot)$ denotará la FDA correspondiente a la distribución hipotética planteada.

1.3.1 *QQ*-plot

Un *QQ*-plot o gráfico de cuantil-cuantil para una determinada distribución continua hipotética, $F_0(\frac{x-\mu}{\sigma})$, se obtiene graficando cada cuantil empírico versus el correspondiente cuantil teórico de la distribución, dados por $X_{(i)}$ y $F_0^{-1}(p_i)$, donde p_i es una probabilidad de interés.

Si se supone que la distribución subyacente depende de un parámetro de locación μ y uno de escala σ (no necesariamente media y desvío), la distribución puede escribirse de la siguiente forma:

$$F_0(x) = G_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = G_0(z),$$

donde $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ se denomina la variable estandarizada y $G_0(z)$

representa la FDA de esta variable.

Así, cuando la hipótesis es verdadera,

$$E(X_{(i)}) = \mu + \sigma E(Z_{(i)}) = \mu + \sigma m_i,$$

donde $Z_{(i)}$ denota el i -ésimo estadístico de orden de la variable aleatoria estandarizada y m_i su valor esperado.

Similarmente, para $0 \leq p_i \leq 1$, $F_0^{-1}(p_i) = \mu + \sigma G_0^{-1}(p_i)$, (1.1)

donde $G_0^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de $G_0(\cdot)$.

Se puede considerar a $X_{(i)}$ como una estimación de su media o del p_i -ésimo cuantil de $F(x)$, donde p_i es una probabilidad de interés.

Por lo tanto, cuando la familia a la que pertenece la distribución hipotética depende de parámetros de posición y escala, el QQ-plot se puede obtener graficando los $X_{(i)}$ en el eje de las ordenadas versus los m_i en el eje de las abscisas. Si la muestra proviene de la distribución hipotética $F_o(x)$, los puntos del gráfico tenderán a ubicarse en una línea recta, cuya ordenada al origen es μ y cuya pendiente es σ .

Se puede entonces hacer una primera evaluación acerca de la veracidad de nuestra suposición sobre la distribución de la muestra a través de la visualización de cuán alineados se encuentran los puntos en el gráfico. Para este gráfico se utiliza generalmente la siguiente fórmula:

$$p_i = \frac{i-0.5}{N} \quad , \quad \text{para } i=1,2,\dots,N. \quad (1.2)$$

y más generalmente:

$$p_{(i)} = \frac{i-c}{N-2c+1} \quad , \quad \text{para } 0 \leq c \leq 1. \quad (1.3)$$

La fórmula (1.2) resulta de (1.3) tomando $c=0.5$. S-plus construye el QQ-plot usando $c=1$. Se elegirán para los gráficos la fórmula dada por (1.2).

Por lo tanto interesa graficar los puntos:

$$(G_o^{-1}(p_i), X_{(i)}).$$

Si $G_o^{-1}(\cdot)$ puede obtenerse en forma cerrada o los cuantiles estándar son conocidos o están tabulados, entonces se puede realizar fácilmente este gráfico. La elección de los p_i en (1.3) no es crucial ya que para muestras suficientemente grandes, valores diferentes de la elección de la constante c no afectarán visualmente la apariencia del gráfico.

Tabla 1.1. FDA y fórmulas para algunas familias de distribuciones para el gráfico QQ.

Distribución	Soporte	$F(x)$	Abscisa	Ordenada
Uniforme	$(\mu, \mu + \sigma)$	$\frac{x - \mu}{\sigma}$	p_i	$X_{(i)}$
Normal	$\mathcal{R}$	$\Phi(\frac{x - \mu}{\sigma})$	$\Phi^{-1}(p_i)$	$X_{(i)}$
Lognormal	$\mathcal{R}_{>0}$	$\Phi(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma})$	$\Phi^{-1}(p_i)$	$\log(X_{(i)})$
Exponencial	$\mathcal{R}_{\geq \mu}$	$1 - e^{-\frac{x - \mu}{\sigma}}$	$\log(\frac{1}{1 - p_i})$	$X_{(i)}$

El gráfico cuantil-cuantil puede realizarse cualquiera sea la distribución hipotética. En el caso de una distribución con parámetros de locación y escala este gráfico permite estimar esos parámetros tal como propone Gupta (1952), lo que se describirá en el Capítulo 5, Sección 5.3. En el presente trabajo se analizarán principalmente las tres primeras distribuciones dadas en Tabla 1.1. Figura 1.2 muestra el gráfico QQ para la distribución Normal y los mismos datos utilizados en Figura 1.1. La recta trazada es la que tiene como pendiente y como ordenada al origen las estimaciones obtenidas a partir de los estimadores de máxima verosimilitud de σ y de μ respectivamente.

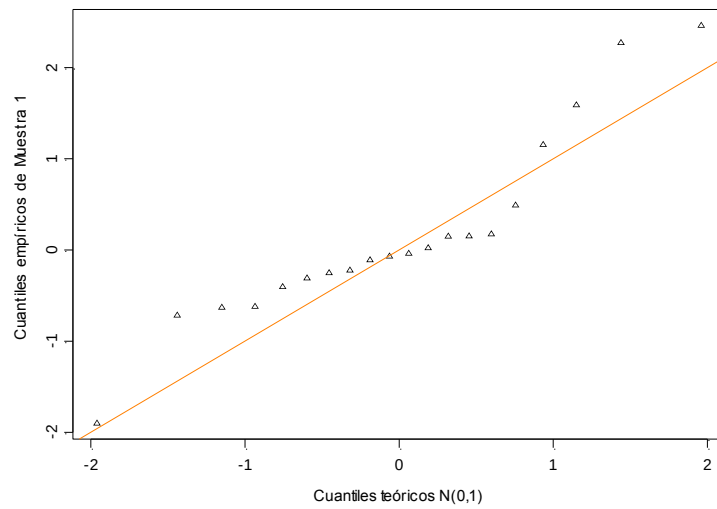


Figura 1.2. Gráfico QQ de la muestra de tamaño 20 de una distribución $N(0,1)$.

La muestra obtenida presenta una ligera asimetría a derecha, con cola pesada a derecha.

La recta trazada es la que tiene como pendiente el desvío muestral y como ordenada al origen la media de la muestra. Los puntos del centro parecen estar más próximos entre si y los de los extremos más alejados.

Mediante el gráfico *QQ* es posible estudiar visualmente:

- Asimetría hacia la izquierda o derecha.
- Colas pesadas respecto de una distribución elegida.
- Colas livianas respecto de una distribución elegida.

1.3.2 *PP*-plot

PP-plot se conoce también como gráfico probabilidad-probabilidad.

Para realizarlo se necesita que la familia a la que pertenezca la distribución dependa de parámetros de posición y escala.

Su construcción está basada en la conocida propiedad que indica que si X es una variable aleatoria con FDA $F(\cdot)$, entonces la variable $U=F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$, denotada $U(0,1)$.

Este gráfico se construye graficando los puntos:

$$(p_i, F_o(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma})),$$

donde los p_i están dadas por (1.2) y $F_o(\frac{x - \mu}{\sigma})$ es la FDA hipotética con parámetros de locación y escala μ y σ respectivamente. Por la propiedad mencionada, si la distribución verdadera es la que se supone, $F_o(\cdot)$, los puntos tenderán a quedar alineados respecto a la recta $y = x$.

Los valores $F_o(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma})$ se denominarán probabilidades empíricas.

Este gráfico tiene una ventaja frente al *QQ*-plot, que consiste en que tanto los valores sobre el eje de abscisas como los obtenidos para el eje de las ordenadas se encuentran acotados entre 0 y 1 ya que se trata de probabilidades. Las abscisas dependen sólo del tamaño de muestra y no de la distribución hipotética.

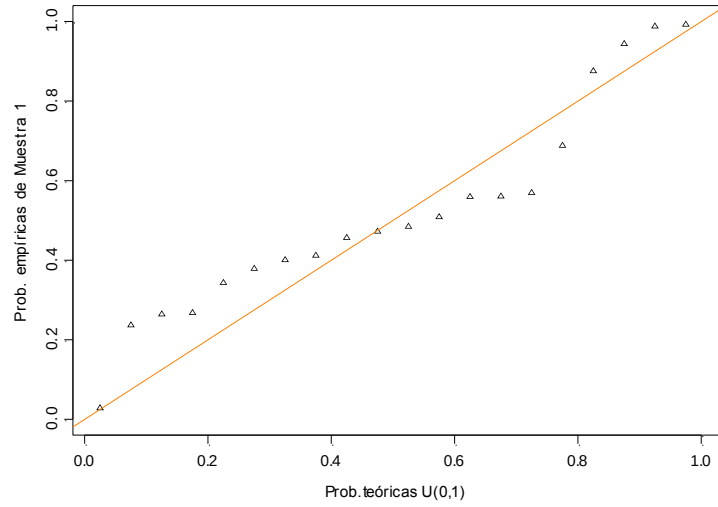


Figura 1.3. Gráfico *PP* de la muestra de tamaño 20 de una distribución $N(0,1)$.

Se puede notar también que los puntos que se han trazado resultan aproximadamente a igual distancia entre sí mientras que en el *QQ*-plot existen puntos más alejados que otros, ya que los puntos en el extremo derecho de la figura 1.2 están más distanciados que los demás.

1.3.3 *DSP*-plot

Michael (1983) propone otra técnica gráfica que se ha denominado *DSP*-plot, la cual se basa en una transformación de las probabilidades teóricas de la distribución uniforme mediante una función estabilizadora de varianza.

Cuando $F \equiv F_0$, con parámetro de locación μ y de escala σ conocidos,

$u_i = F_0\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$ se pueden considerar como una realización de los estadísticos de orden de una distribución uniforme, por la propiedad citada en 1.3.2.

Se sabe que la distribución de los estadísticos de orden de una muestra aleatoria de tamaño N de una distribución $U(0,1)$ es Beta

con parámetros que dependen del tamaño de la muestra y del orden del estadístico (Fisz, 1963, página 377). Por lo tanto no tienen igual varianza.

La transformación arcoseno (denotada por $\arcsen$) se puede utilizar para estabilizar la varianza de los estadísticos de orden uniformes.

En efecto, sea $S = (\frac{2}{\pi})\arcsen(U^{0.5})$, donde $U \sim U(0,1)$. (1.4)

Entonces:

$F_S(s) = P(S \leq s) = P(\frac{2}{\pi}\arcsen(U^{0.5}) \leq s) = P(U \leq (\sen(\frac{\pi}{2}s))^2) = F_U((\sen(\frac{\pi}{2}s))^2) = (\sen(\frac{\pi}{2}s))^2$, para $0 \leq s \leq 1$, ya que la función seno es creciente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidades, denotada por f_S , es:

$$f_S(s) = \frac{\pi}{2} 2\sen(\frac{\pi}{2}s) \cos(\frac{\pi}{2}s) = \frac{\pi}{2} \sen(\pi s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Esta distribución tiene la propiedad de que sus estadísticos de orden tienen la misma varianza asintótica.

En efecto, sea $\xi_k^{(N)}$ el k -ésimo cuantil de la muestra de tamaño N de la distribución de S dada en (1.4) y a_λ es el cuantil teórico de la distribución de S siendo $k = [N\lambda] + 1$, con $0 < \lambda < 1$, tal que $\frac{k}{N} \rightarrow \lambda$.

De acuerdo a Fisz, (1963, página 380), la variable aleatoria

$Y_k^N = f_S(a_\lambda) \sqrt{\frac{N}{\lambda(1-\lambda)}} (\xi_k^{(N)} - a_\lambda)$ tiene distribución asintótica $N(0,1)$.

Por lo tanto,

$$N \text{Var}(\xi_k^{(N)}) = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f_S(a_\lambda)^2}. \quad (1.5)$$

Calculando se obtiene:

$$\lambda = \int_0^{a_\lambda} f_S(s) ds = \int_0^{a_\lambda} \frac{\pi}{2} \sen(\pi s) ds = \frac{-\cos(\pi s)}{2} \Big|_0^{a_\lambda} = \frac{-\cos(\pi a_\lambda) + 1}{2}.$$

Entonces $a_\lambda = \frac{\arccos(1-2\lambda)}{\pi}$ y $\cos^2(\pi a_\lambda) = (1-2\lambda)^2$, por lo tanto,

$$\sen^2(\pi a_\lambda) = 1 - (1-2\lambda)^2 = 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 4\lambda(1-\lambda).$$

Reemplazando en (1.5) se obtiene:

$$N \text{Var}(\xi_k^{(N)}) = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f_s(a_\lambda)^2} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{\frac{\pi^2}{4} 4\lambda(1-\lambda)} = \frac{1}{\pi^2} \quad , \text{ que no depende de } \lambda .$$

Se define el *DSP*-plot o gráfico de probabilidad estabilizada como el diagrama de los puntos:

$(\frac{2}{\pi} \arccos(p_i^{0.5}), \frac{2}{\pi} \arccos(u_i^{0.5}))$, donde $p_i = \frac{i-0.5}{N}$ son la probabilidades teóricas de la distribución $U(0,1)$ y los $u_i = F_o(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma})$ las probabilidades empíricas.

Si la distribución subyacente de los datos es realmente F_o , los puntos graficados tenderán a encontrarse alineados sobre la recta $y = x$.

Como aplicación, se realiza el gráfico *DSP* para la muestra usada en las Figuras 1.2 y 1.3.

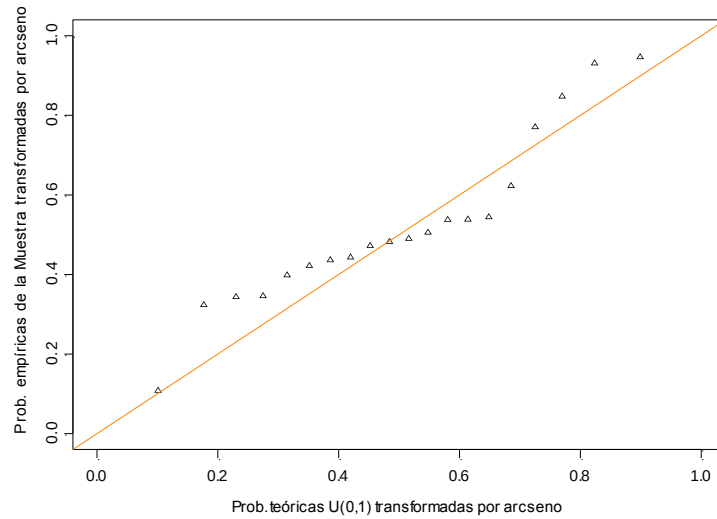


Figura 1.4. Gráfico *DSP* de la muestra de tamaño 20 de una distribución $N(0,1)$.

El gráfico obtenido se parece al obtenido en el *PP*-plot y comparte con él las propiedades de que tanto las abscisas como las ordenadas se encuentran en el intervalo $(0,1)$ y las abscisas sólo dependen del tamaño de la muestra. La ventaja que plantea Michael (1983) es que dado que los estadísticos de orden de la distribución uniforme no tienen igual varianza, la transformación arcseno logra estabilizar las varianzas asintóticamente y esto facilita la visualización de los puntos alejados de la recta.

Para poder establecer la bondad de ajuste a la normal o a cualquier otra distribución de interés se plantearán tests cuyas regiones de aceptación se podrán visualizar a través de los gráficos presentados en las secciones 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3.

En Tabla 1.2 se resumen las fórmulas para construir los tres gráficos que se han analizado.

Tabla 1.2. Fórmulas para construir gráficos *PP*, *QQ* y *DSP*.

Tipo de Gráfico	Absisa	Ordenada
<i>QQ</i>	$x_i = F_o^{-1}\left(\frac{i-0.5}{N}\right)$	$y_i = X_{(i)}$
<i>PP</i>	$t_i = \frac{i-0.5}{N}$	$u_i = F_o\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$
<i>DSP</i>	$r_i = \frac{2}{\pi} \arcsen\left[\left(\frac{i-0.5}{N}\right)^{0.5}\right]$	$s_i = \frac{2}{\pi} \arcsen\left(F_o^{0.5}\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)\right)$

En general, los parámetros de locación y escala son desconocidos. En estos casos, los gráficos *PP* y *DSP* se pueden realizar reemplazando los parámetros por sus estimaciones. Se suelen emplear los estimadores de máxima verosimilitud cuando su cálculo es sencillo.

Los tres tipos de gráficos que se han estudiado en esta sección se utilizarán en los capítulos próximos con el objetivo de visualizar bandas de aceptación que se derivarán de tests de bondad de ajuste y que para cada test resultarán equivalentes.

Capítulo 2

Test de bondad de ajuste a una distribución completamente especificada.

2.1 Introducción

En este capítulo se tratará el problema de test de hipótesis en el caso en que la hipótesis nula simple es de la forma:

Ho: La muestra aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_N$ proviene de la distribución

$F = F_0(x, \theta)$, siendo θ el vector de parámetros de locación y

escala conocidos.

Sea $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ la muestra ordenada. Un estadístico que mida la diferencia entre la distribución empírica y la distribución teórica se llama estadístico del tipo FDA. Se han definido varios estadísticos de este tipo basados en las diferencias verticales entre $F_N(x)$ y $F(x)$, pudiéndose éstos dividir en dos grupos: la clase del supremo y la clase cuadrática.

1. Estadísticos del supremo: los primeros dos estadísticos de este grupo son D^+ y D^- , que representan, respectivamente, la máxima diferencia vertical cuando $F_N(x)$ es mayor que $F(x)$ y cuando $F_N(x)$ es menor que $F(x)$. Es decir,

$$D^+ = \sup_x \{F_N(x) - F(x)\} \quad \text{y} \quad D^- = \sup_x \{F(x) - F_N(x)\} .$$

El estadístico más conocido de este grupo fue propuesto por Kolmogorov (1933) y está definido como:

$$D = \sup_x \{|F_N(x) - F(x)|\} = \|F_N - F\|_\infty = \max(D^+, D^-) . \quad (2.1)$$

Otro estadístico de este grupo es el propuesto por Kuiper (1960) basado en $V = D^+ + D^-$.

2. Estadísticos de tipo cuadrático: un grupo de éstos, conocido como del tipo de Cramer von Mises, está basado en la distancia en L_2 entre la distribución empírica y la distribución teórica y está dado por:

$$Q = N \int_{-\infty}^{+\infty} (F_N(x) - F(x))^2 \psi(x) dF(x) .$$

donde $\psi(x)$ es una función de peso apropiada. Cuando $\psi(x)=1$, el estadístico es el de Cramer-von Mises (Conover, 1999), denotado usualmente como W^2 , Cuando $\psi(x)=[F(x)(1-F(x))]^{-1}$, el estadístico se conoce como de Anderson-Darling (1954) y se denota como A^2 . Otro estadístico es el de Watson (1961), el cual está dado por:

$$U^2 = W^2 - N(\bar{Z} - 0.5)^2 ,$$

$$\text{donde } \bar{Z} = \sum_{i=1}^N F(X_i, \theta) / N .$$

En este trabajo se trabajará con estadísticos del supremo, es decir, basados en la norma del supremo o norma infinito, los cuáles permitirán producir tests gráficos.

2.2 Estadísticos del supremo

De acuerdo a la definición anterior (2.1),

$$D = \sup_x \{ |F_N(x) - F(x)| \} = \sup_x \frac{1}{N} \left\{ \left| \sum_{i=1}^N \left(I_{(-\infty, x]}(X_i) - F(x) \right) \right| \right\} .$$

Y, como se supone que $F(x)$ es continua y monótona, y por lo tanto existe $F^{-1}(x)$,

$$D = \sup_{\substack{t=F(x) \\ t \in [0,1]}} \frac{1}{N} \left\{ \left| \sum_{i=1}^N \left(I_{(-\infty, F^{-1}(t)]}(X_i) - t \right) \right| \right\} ,$$

donde $I_{(-\infty, F^{-1}(t)]}(X_i)$ es la función indicadora dada por,

$$I_{(-\infty, F^{-1}(t)]}(X_i) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } X_i \leq F^{-1}(t) \Leftrightarrow F(X_i) \leq t \\ 0 & , \text{ en otro caso.} \end{cases} ,$$

y así,

$$D = \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{N} \left\{ \left| \sum_{i=1}^N \left(I_{(-\infty, t]}(F(X_i)) - t \right) \right| \right\} = \sup_x \{ |G_N(x) - G(x)| \} ,$$

donde $G_N(x)$ es la distribución empírica de $Y_i = F(X_i)$ y $G(x)$ es la función de distribución de una v.a. $U(0,1)$.

Como la distribución de las X está completamente especificada, $F(X)$ tiene distribución $U(0,1)$ y las correspondientes Y_i resultan una muestra aleatoria de dicha distribución uniforme. Vale decir que la distribución del estadístico D , bajo H_0 , no depende de la distribución F . El test basado en el estadístico D se suele denominar "distribution free" o "a distribución libre" y se puede utilizar para testear cualquier distribución completamente especificada.

Si $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ es una muestra aleatoria ordenada de una distribución completamente especificada $F(x)$, llamando $F(X_{(i)}) = Z_{(i)}$ resulta que $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(N)}$ es una muestra aleatoria ordenada $U(0,1)$. Se tiene que,

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{i}{N} - Z_{(i)} \right\}, \quad D^- = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ Z_{(i)} - \frac{i-1}{N} \right\} \quad \text{y} \quad D = \max(D^+, D^-) = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(i-0.5)}{N} - Z_{(i)} \right| + \frac{0.5}{N},$$

obteniendo la expresión para D desde la definición del módulo.

2.3 Test basado en el estadístico D o test de Kolmogorov Smirnov (K-S)

Se recuerda que la hipótesis nula de interés es:

H_0 : la muestra aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_N$ proviene de la distribución

$F \equiv F_o(x, \theta)$, siendo θ el vector de parámetros de locación y escala conocidos.

Sea $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ la muestra ordenada.

Los pasos para realizar este test son los siguientes:

1. Calcular $Z_{(i)} = F_o\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$, para $i=1, 2, \dots, N$.

2. Obtener el valor del estadístico,

$$D = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(i-0.5)}{N} - Z_{(i)} \right| + \frac{0.5}{N}.$$

3. Comparar el valor del estadístico K-S con el percentil $1-\alpha$ de la distribución K-S (ver Tabla A1 de Apéndice 1) y rechazar H_0 para un nivel de significación α si el valor observado

del estadístico supera el $1-\alpha$ cuantil de la distribución K-S.

La distribución exacta del estadístico K-S fue estudiada por Durbin (1973). Mediante simulaciones de Monte Carlo, se hallaron los percentiles de la distribución del estadístico de K-S bajo la distribución nula que se incluyen en Tabla A1 (ver Apéndice 1). Dicha tabla reproduce y completa aquellas que se encuentran en Michael (1983), D'Agostino and Stephens(1986) y Conover (1999).

2.4 Bandas de confianza derivadas del estadístico D

Invirtiendo la región de aceptación del test, se puede obtener una región en el espacio de funciones de distribución de modo tal que dicha región contenga a la verdadera distribución de los datos con probabilidad alta.

Denotando por $d_{1-\alpha}$ al percentil $1-\alpha$ de la distribución del estadístico de K-S bajo H_0 y según (2.1), una banda de confianza de nivel $1-\alpha$ se define como

$$R = \{F / \|F_N - F\|_{\infty} < d_{1-\alpha}\},$$

o, equivalentemente:

$$R = \{F / F_N - d_{1-\alpha} < F < F_N + d_{1-\alpha}\}.$$

Como el valor de la derecha de la desigualdad podría ser mayor que 1 y el de la izquierda podría resultar negativo, la banda de confianza queda más precisamente especificada como:

$$R = \{F / \max\{F_N - d_{1-\alpha}, 0\} < F < \min\{F_N + d_{1-\alpha}, 1\}\},$$

la cual contendrá a la verdadera distribución de los datos con probabilidad mayor o igual que $1-\alpha$.

En la Figura 2.1 se presenta una banda de confianza de nivel 0.95 obtenida a partir de la distribución empírica correspondiente a la muestra de tamaño 20 de una $N(0,1)$ que se graficó en la Figura 1.1. El correspondiente percentil es $d_{0.95} = 0.2958$.

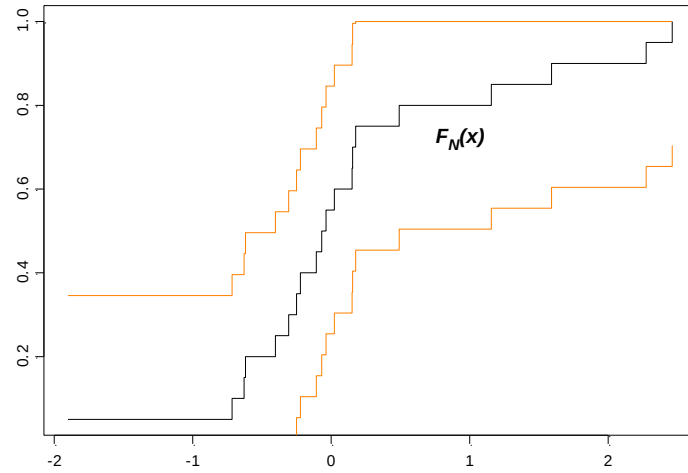


Figura 2.1. Gráfico de la FDE correspondiente a Muestra 1 y de las bandas de confianza de nivel 0.95 para la verdadera distribución de los datos.

2.5 Test basado en el estadístico DSP

A continuación se definirá un estadístico que permite realizar un test de bondad de ajuste para una distribución completamente especificada.

Si $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(N)}$ es una muestra aleatoria ordenada de una distribución $U(0,1)$, entonces,

$$D = \max(D^+, D^-) = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(i-0.5)}{N} - u_{(i)} \right| + \frac{0.5}{N}. \quad (2.2)$$

Michael (1983) propone el estadístico,

$$DSP = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \arccos\left(\left(\frac{i-0.5}{N}\right)^{0.5}\right) - \arccos(u_{(i)}^{0.5}) \right| \right\}, \quad (2.3)$$

el cual está basado en la transformación utilizada para definir el gráfico DSP (ver Sección 1.3.3).

En forma análoga a lo visto en la Sección 2.3, si $U_{(i)} = F_o\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$, para $i=1, 2, \dots, N$, bajo H_0 , la muestra ordenada $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(N)}$ extraída de una distribución $U(0,1)$, permite calcular el estadístico

DSP según (2.2). El valor de este estadístico se compara con el percentil $1-\alpha$ de la distribución de DSP dados en Tabla A2 (ver Apéndice 1).

Esta tabla completa la presentada por Michael (1983). En este trabajo se han obtenido los cuantiles de la distribución del estadístico bajo H_0 por simulaciones de Monte Carlo en base a 10000 replicaciones para cada tamaño de muestra y nivel de significación. Se rechaza H_0 para un nivel de significación α , si el valor del estadístico observado supera el cuantil $1-\alpha$, que se denotará $dsp_{1-\alpha}$.

2.6 Bandas de confianza derivadas del estadístico DSP .

Como se verá en la fórmula (2.6) Sección 2.7, se pueden también desarrollar bandas de confianza derivadas del test basado en el estadístico DSP en forma análoga a lo desarrollado en Sección 2.4. En el gráfico siguiente puede observarse la FDE y las bandas de confianza al 95 % para el ejemplo analizado en la Sección 2.4.

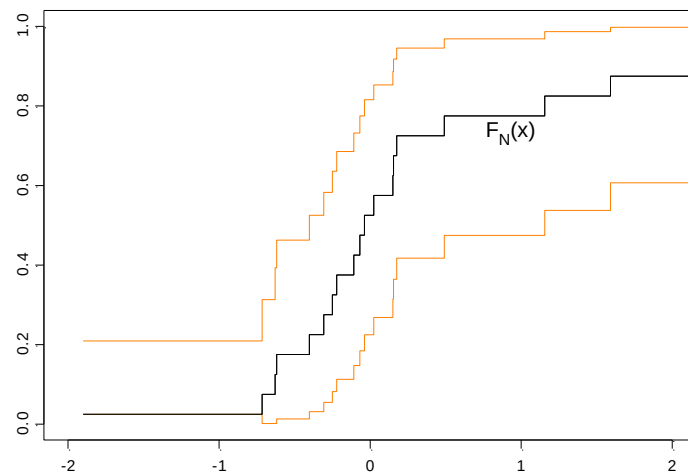


Figura 2.2. Gráfico de la FDE para Muestra 1 y bandas de confianza del 95 % para la verdadera distribución de los datos a partir del test basado en el estadístico DSP .

2.7 Bandas de aceptación utilizando D y DSP

Utilizando los cuantiles de la distribución de los estadísticos D y DSP , es posible construir bandas de aceptación para los tres tipos de gráficos presentados en la Sección 1.3. Estas bandas definen regiones tales que, si todos los puntos graficados se encuentran dentro de ellas, no se rechaza la hipótesis nula para el nivel de significación especificado. Esto permite realizar un test visual de bondad de ajuste.

Aplicar los tests con un nivel de significación α y trazar los gráficos respectivos para ver si todos los puntos caen dentro de la región de aceptación de nivel $1-\alpha$ resulta, como se verá, equivalente.

De acuerdo a las notaciones presentadas en la Tabla 1.2 se tiene que:

Si $U_i = F_o\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$, para $i=1, 2, \dots, N$, entonces

$$D = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(i-0.5)}{N} - z_{(i)} \right| + \frac{0.5}{N} = \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - u_i| + \frac{0.5}{N} \quad \text{y}$$

$$DSP = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \arcsen \left[\left(\frac{i-0.5}{N} \right)^{0.5} \right] - \arcsen(u_i^{0.5}) \right| \right\} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \arcsen(t_i^{0.5}) - \arcsen(u_i^{0.5}) \right| \right\} =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ |r_i - s_i| \right\}.$$

Se rechaza H_0 para un nivel de significación α si el valor observado del estadístico es mayor que el percentil correspondiente.

En el caso del estadístico DSP ,

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad |r_i - s_i| \leq dsp_{1-\alpha}, \quad (2.4)$$

$$-\frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha} \leq \arcsen(t_i^{0.5}) - \arcsen(u_i^{0.5}) \leq \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha},$$

$$\arcsen(t_i^{0.5}) - \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha} \leq \arcsen(u_i^{0.5}) \leq \arcsen(t_i^{0.5}) + \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha},$$

Como $0 \leq u_i \leq 1$, entonces:

$$\max \left\{ \text{sen}(\arcsen(t_i^{0.5}) - \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha}), 0 \right\} \leq u_i^{0.5} \leq \min \left\{ \text{sen}(\arcsen(t_i^{0.5}) + \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha}), 1 \right\}.$$

Luego se obtiene:

$$\max \left\{ \text{sen}^2(\arcsen(t_i^{0.5}) - \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha}), 0 \right\} < u_i < \min \left\{ \text{sen}^2(\arcsen(t_i^{0.5}) + \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha}), 1 \right\}. \quad (2.5)$$

Donde $dsp_{1-\alpha}$ es el percentil $1-\alpha$ de la distribución de DSP bajo H_0 . Así, se obtienen las curvas que definen la región de aceptación en el gráfico PP .

Para el DSP -plot, $\forall 1 \leq i \leq N$, desde (2.4),

$$r_i - dsp_{1-\alpha} \leq s_i \leq r_i + dsp_{1-\alpha} \quad (2.6)$$

y como se grafican los s_i sobre el eje de las ordenadas, resulta que las regiones de aceptación están dadas por rectas.

En el caso del QQ -plot, para obtener las regiones de aceptación, retomando la expresión (2.3):

$$\max \left\{ \text{sen}^2(\arcsen(t_i^{0.5}) - \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha}), 0 \right\} < F_o \left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma} \right) < \min \left\{ \text{sen}^2(\arcsen(t_i^{0.5}) + \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha}), 1 \right\}. \quad (2.7)$$

Como se supone que la FDA bajo H_0 es continua y monótona, entonces existe F_o^{-1} , y teniendo en cuenta que $F_o^{-1}(0)$ puede ser $-\infty$ y $F_o^{-1}(1)$ puede ser $+\infty$, las desigualdades (2.5) y (2.6) se convierten en:

$$\mu - \sigma \max \left\{ F_o^{-1}(\text{sen}^2(\arcsen(F_o^{0.5}(x_i)) - \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha})), F_o^{-1}(0) \right\} < X_{(i)} < \mu + \sigma \min \left\{ F_o^{-1}(\text{sen}^2(\arcsen(F_o^{0.5}(x_i)) + \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha})), F_o^{-1}(1) \right\} \quad (2.8)$$

En este caso, las curvas obtenidas dependen de la distribución planteada en la hipótesis nula, en particular de sus parámetros de locación y escala, los cuales se suponen conocidos. Esto ofrece una desventaja frente a lo obtenido en (2.5) y (2.6) ya que esas fórmulas no dependen de la distribución hipotética ni de los parámetros conocidos.

Ahora se obtendrán las regiones de aceptación para los tres gráficos contruidos en base al estadístico D de K-S.

Al aplicar el test de K-S, se rechaza H_0 para un nivel de significación α , si el valor observado del estadístico es mayor que el percentil correspondiente, entonces,

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad |t_i - u_i| + \frac{0.5}{N} \leq d_{1-\alpha} \quad , \quad \text{si y sólo si,} \quad t_i - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \leq u_i \leq t_i + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \quad . \quad (2.9)$$

Donde $d_{1-\alpha}$ es el percentil $1-\alpha$ de la distribución de D bajo H_0 . Luego, para el *PP*-plot, en cuyo eje de las abscisas se grafican las t_i , las bandas quedan definidas por dos rectas como se observa en (2.9), siempre que no sean mayores que uno o menores que cero, vale decir, que están dadas por la expresión (2.10).

$$\max \left\{ t_i - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N}, 0 \right\} \leq u_i \leq \min \left\{ t_i + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N}, 1 \right\} \quad . \quad (2.10)$$

En el caso del *QQ*-plot, según (2.8) y teniendo en cuenta las fórmulas de Tabla 1.2, se tiene que,

$$t_i - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \leq F_o \left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \leq t_i + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \quad . \quad (2.11)$$

Entonces,

$$\mu + \sigma F_o^{-1} \left(t_i - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \right) \leq X_{(i)} \leq \mu + \sigma F_o^{-1} \left(t_i + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \right) \quad . \quad (2.12)$$

De acuerdo a Tabla 1.2, se puede rescribir la desigualdad (2.12) para obtener las bandas en el gráfico *QQ*, las cuales vienen dadas por:

$$\mu + \sigma F_o^{-1} \left(F_o(F_o^{-1}(t_i)) - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \right) \leq X_{(i)} \leq \mu + \sigma F_o^{-1} \left(F_o(F_o^{-1}(t_i)) + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \right) ,$$

$$\text{o sea,} \quad \mu + \sigma F_o^{-1} \left(F_o(x_i) - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \right) \leq y_i \leq \mu + \sigma F_o^{-1} \left(F_o(x_i) + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \right) \quad . \quad (2.13)$$

Por último, las curvas para el *DSP*-plot a partir de (2.11) y Tabla 1.2, están dadas por:

$$t_i - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \leq F_o \left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \leq t_i + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \quad ,$$

o equivalentemente por,

$$\arcsen \left[\left(t_i - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \right)^{0.5} \right] \leq \arcsen \left(F_o^{0.5} \left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \right) \leq \arcsen \left[\left(t_i + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \right)^{0.5} \right] \quad , \quad \text{o sea,}$$

$$\frac{2}{\pi} \arcsen \left[(t_i - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N})^{0.5} \right] \leq \frac{2}{\pi} \arcsen(F_o^{0.5}(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma})) \leq \frac{2}{\pi} \arcsen \left[(t_i + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N})^{0.5} \right] .$$

Teniendo en cuenta que las bandas deben estar acotadas entre 0 y 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{2}{\pi} \arcsen \left[(sen^2(\frac{\pi}{2} r_i) - d_{1-\alpha} + \frac{0.5}{N})^{0.5} \right], 0 \right\} &\leq \frac{2}{\pi} \arcsen(F_o^{0.5}(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma})) \\ \min \left\{ \frac{2}{\pi} \arcsen \left[(sen^2(\frac{\pi}{2} r_i) + d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N})^{0.5} \right], 1 \right\} & \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bandas obtenidas con un mismo estadístico llevarán a la misma conclusión, cualquiera sea el gráfico elegido. La Tabla 2.7.1 resume estos resultados.

Tabla 2.7.1. Expresiones para construir bandas de aceptación utilizando los percentiles de las distribuciones de D y DSP bajo H_0 para un nivel de significación α .

Tipo de Gráfico Estadístico		Curvas que definen la región de aceptación
QQ	D	$y = \mu + \sigma F_o^{-1} \left[F_o(x) \pm (d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N}) \right]$
QQ	DSP	$y = \mu + \sigma F_o^{-1} \left\{ sen^2 \left[\arcsen(F_o^{0.5}(x)) \pm \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha} \right] \right\}$
DSP	D	$s = \frac{2}{\pi} \arcsen \left[\left\{ sen^2(\frac{\pi}{2} r) \pm (d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N}) \right\}^{0.5} \right]$
DSP	DSP	$s = r \pm dsp_{1-\alpha}$
PP	D	$u = t \pm (d_{1-\alpha} - \frac{0.5}{N})$
PP	DSP	$u = sen^2(\arcsen(t^{0.5}) \pm \frac{\pi}{2} dsp_{1-\alpha})$

Para realizar los tests gráficos son preferibles las bandas obtenidas en el caso del gráfico PP , ya que se trata de un par de rectas en el caso del estadístico D y de curvas acotadas en el caso de DSP . Para su comparación, en los ejemplos que se darán en secciones y capítulos siguientes, se harán los tres gráficos.

Se observa que en el caso en que la distribución a testear bajo H_0 sea una $U(0,1)$, el QQ -plot coincide con su respectivo PP -plot. En el caso del PP -plot y DSP -plot, se trazará la recta $y=x$, la que permitirá visualizar mejor el centro de la banda. En el caso del gráfico QQ la recta será $y=\mu+\sigma x$, como puede observarse de la Tabla 2.7.1.

2.8 Ejemplos de aplicación

En todos los ejemplos se ha verificado que, en el caso del test K-S, los resultados obtenidos utilizando el programa S-plus y los programas desarrollados en código S en este trabajo, coinciden.

Ejemplo 2.8.1

Se aplicarán los tests planteados al conjunto de datos denominado Muestra 1. La hipótesis nula en este caso es:

H_0 : la muestra aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_N$ proviene de una población con distribución $N(0,1)$, es decir, $F_0(x) = \Phi(x)$.

Se desarrolló un programa (ver Apéndice 2) para realizar los cálculos indicados en (2.2) y (2.3) para cualquier distribución completamente especificada, en particular cuando la distribución hipotética es normal con media y desvío estándar conocidos. Los resultados fueron implementados computacionalmente mediante Programa 2.4 (ver Apéndice 2).

Comparando los valores de D y DSP hallados con los cuantiles dados en las Tablas A1 y A2 de Apéndice 1 para un nivel de significación 5% ($d_{0.95}=0.2958260$ y $dsp_{0.95}=0.20141820$), se obtienen los resultados de Tabla 2.8.1.

Tabla 2.8.1

Programa	Valor D	Valor DSP
2.4	0.1872101	0.1472466
	0.25 < p-valor < 0.5	0.25 < p-valor < 0.5

Se concluye que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de normalidad.

Las regiones de aceptación de nivel 95% se encuentran graficadas en las Figuras 2.3-2.5. Se comprueba en estas tres figuras que todos los puntos caen dentro de dichas regiones.

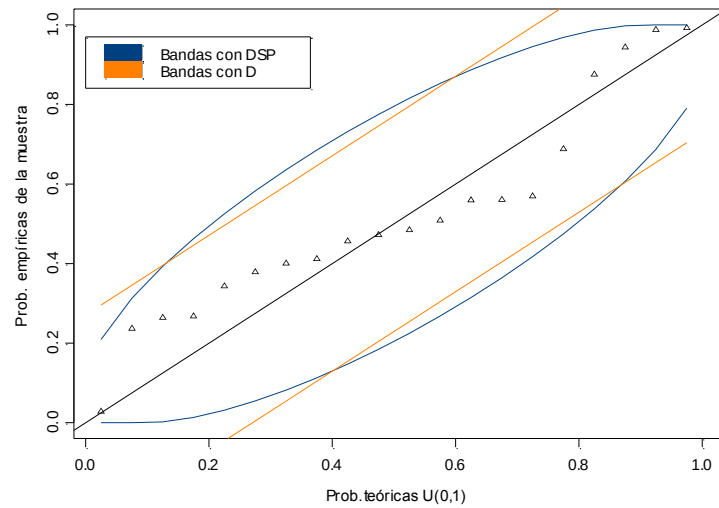


Figura 2.3. Gráfico *PP* con bandas de aceptación para Muestra 1.

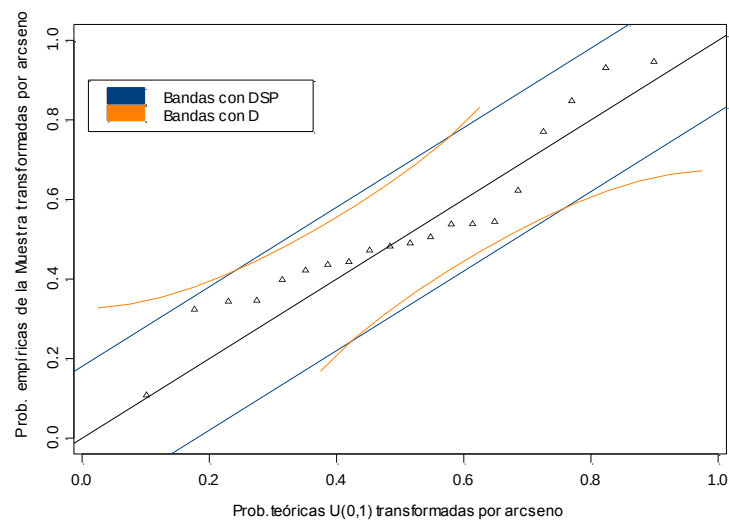


Figura 2.4. Gráfico *DSP* con bandas de aceptación para Muestra 1.

En la Figura 2.5 se ha trazado la recta mencionada en la Sección 1.3.1: aquella que se obtiene estimando la media y desvío de la muestra.

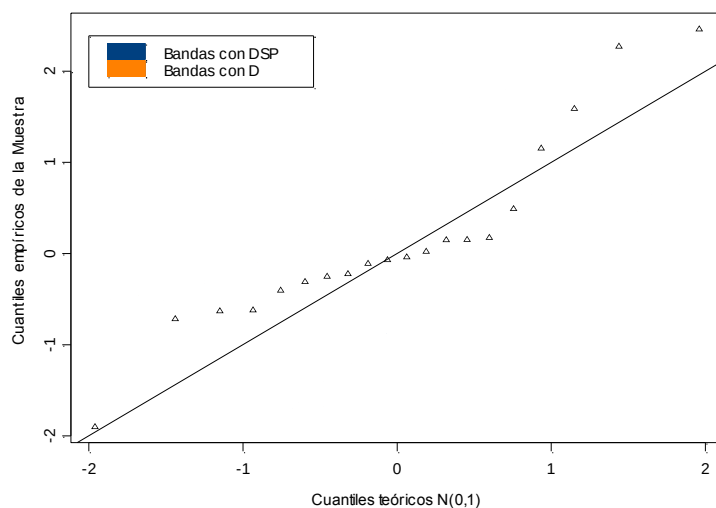


Figura 2.5. Gráfico *QQ* con bandas de aceptación para Muestra 1.

Ejemplo 2.8.2

En el libro de D’Agostino (1986, Capítulo 8) se presenta un ejemplo de una muestra de tamaño 10 para probar si los datos provienen de una distribución $U(0,1)$. Esta muestra es utilizada en varios tests para la distribución uniforme en distintos capítulos del libro. Los datos se consignan en Tabla 2.8.2.

Tabla 2.8.2

0.004	0.304	0.612	0.748	0.771	0.806	0.85	0.885	0.906	0.977
-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	-------	-------	-------

Se calculan los estadísticos con el programa 2.4 obteniendo los resultados presentados en Tabla 2.8.3.

Tabla 2.8.3

Programa	Valor D	Valor DSP
2.4	0.448000	0.2621851
	$0.01 < p\text{-valor} < 0.05$	$0.01 < p\text{-valor} < 0.05$

Comparando los valores de D y DSP hallados con los cuantiles dados en las Tablas A1 y A2 del Apéndice 1 para un nivel de significación del 5% ($d_{0.95} = 0.40964$ y $dsp_{0.95} = 0.258836$) se concluye que, para dicho nivel, se rechaza la hipótesis nula que especifica que los datos provienen de una distribución uniforme.

El PP -plot con bandas de aceptación del 95%, dado en la Figura 2.6 muestra fuera de las bandas D y DSP y otro fuera de la banda D .

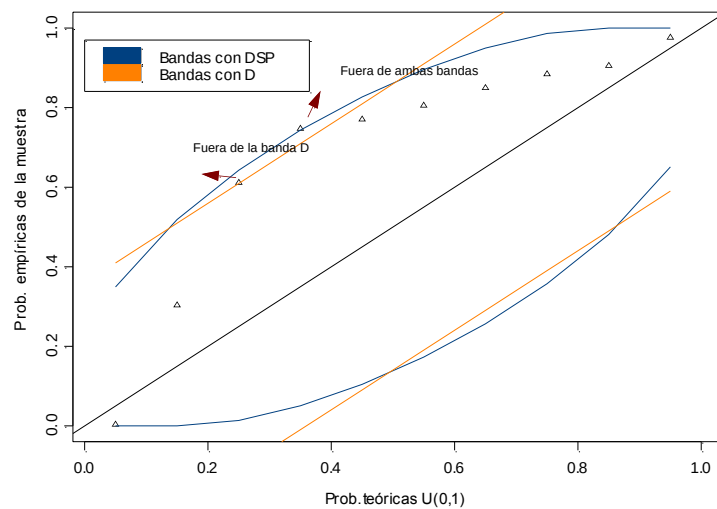


Figura 2.6. Gráfico PP Ejemplo 2.8.2 para testear si los datos provienen de una distribución uniforme para los datos de la Tabla 2.8.2.

Ejemplo 2.8.3

Proschan (1963) obtuvo 213 valores de tiempos de falla de equipos de aire acondicionado en aviones y propuso como modelo para dichos tiempos la distribución exponencial. El avión número 7910 fue elegido para testear que la distribución entre fallas es exponencial con parámetro de locación 0 y de escala 100. Vale decir que la FDA

esta variable es $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$

Se trata de un test de bondad de ajuste para una distribución totalmente especificada. No se rechaza la hipótesis nula con un p -valor alto ($p = 0.45$). Supóngase entonces que 100 es el verdadero

valor del parámetro de escala y se testeará otro valor, por ejemplo, $\beta=50$.

Tabla 2.8.4. Datos de Proschan(1963) .

12	21	26	27	29	29	48	57	59	70	74	153	326	386	502
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

A los datos presentados en la Tabla 2.8.4, se le aplica la denominada transformación integral que se indica en la Sección 2.3, paso 1, y se obtienen los valores $u_i = 1 - e^{-\frac{x_i}{50}}$, siendo los x_i los valores de Tabla 2.8.4. Los valores obtenidos u_i se indican en Tabla 2.8.5.

Tabla 2.8.5. Datos de Proschan (1963) transformados según una exponencial con parámetro de escala 50

0.21	0.34	0.41	0.42	0.44	0.44	0.62	0.68	0.69	0.75	0.77	0.95	1	1	1
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---	---	---

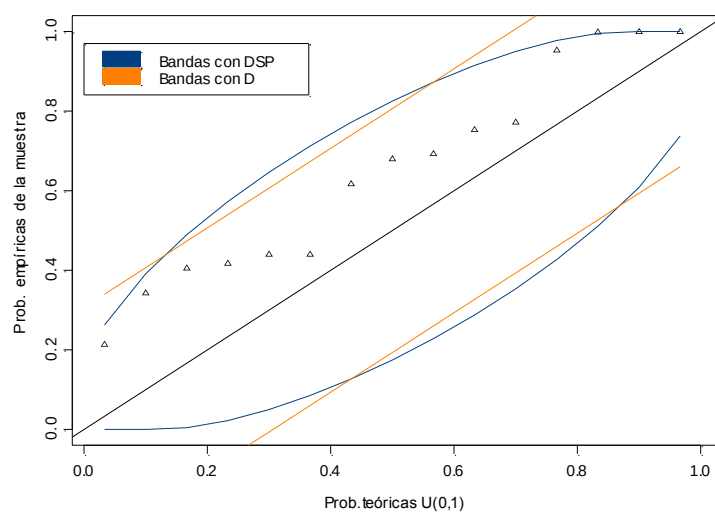


Figura 2.7. Gráfico *PP* y bandas de aceptación del 95% correspondientes a los datos de Proschan (1963) .

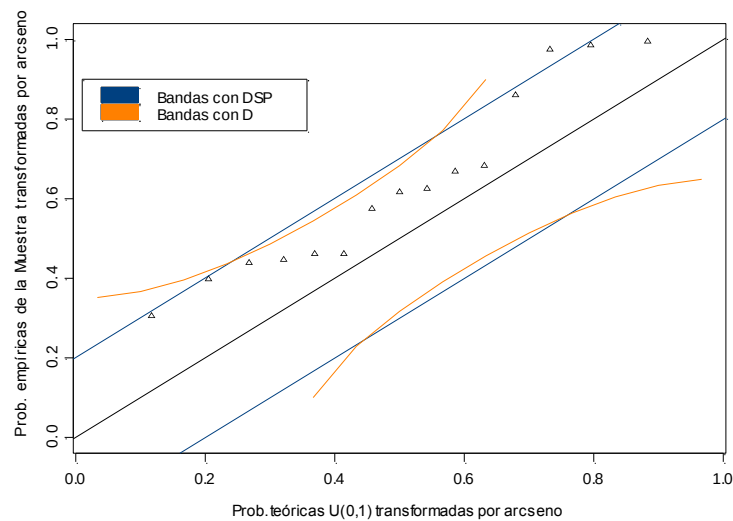


Figura 2.8. *DSP*-plot y bandas de aceptación del 95% correspondientes a los datos de Proschan (1963).

En las Figuras 2.7 y 2.8 se puede observar que existe un único punto fuera de la banda del 95% para el test basado en el estadístico *DSP*. Se calculan los estadísticos con el programa 2.4 y los resultados se presentan en Tabla 2.8.6.

Tabla 2.8.6

Valor D	Valor DSP
0.2762865	0.2432757
$0.1 < p\text{-valor} < 0.25$	$0.01 < p\text{-valor} < 0.05$

El test gráfico indica que para el nivel del 5% no se rechaza la hipótesis nula con el estadístico D y sí se rechaza para el *DSP*.

Con el estadístico *DSP* la conclusión es más contundente, ya que a nivel 0.05 se rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de una distribución exponencial de parámetros 0 y 50, como se esperaba obtener al cambiar arbitrariamente el parámetro de escala, debido a la importante diferencia entre el verdadero valor ($\beta = 100$) y el supuesto ($\beta = 50$).

2.9 Potencia de los tests planteados

Stephens (1974) ha estudiado y comparado la potencia de los tests basados en los estadísticos D , V de Kuiper, W^2 , A^2 , U^2 y el conocido chi-cuadrado de Pearson en el caso que se está considerando para una distribución completamente especificada. Dicho estudio, en el que se ha empleado distribuciones pertenecientes a tres familias como alternativas, que el autor denomina A , B y C y que se describirá más adelante, indica que los tests basados en estadísticos de tipo cuadrático son, en general, más potentes que el basado en D . En cambio, este último es más potente que el test de Pearson y que el basado en V , cuando las alternativas pertenecen a la familia A . Sin embargo, no es posible obtener un test que resulte más potente en todos los casos analizados. Más aún, el basado en D , con certeza, no lo es ya que, como se indicó, los test de tipo cuadrático resultan más potentes.

Michael (1983) emplea las mismas familias para comparar la potencia del test basado en su estadístico DSP con la del test basado en D .

Se supone que interesa testear la hipótesis nula $H_0: F \equiv F_0$ contra una alternativa $H_1: F \equiv F_1$ en base a una muestra aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_N$ de una distribución F .

Considerando la transformación $R = F_0(x)$ y llamando G a FDA correspondiente a la distribución de R , el problema consiste ahora en testear $H_0: G \equiv U(0,1)$ contra $H_1: G \equiv G_1$ en base a la muestra aleatoria transformada, es decir, $R_1 = F_0(X_1), \dots, R_n = F_0(X_n)$, para los datos transformados.

Se desea entender la razón por la cual se utilizaron, y serán utilizadas en este trabajo, alternativas dentro de las familias A , B y C . En efecto, se verá que, elegir las hipótesis alternativas G_1 dentro de las familias A , B y C para el test realizado sobre datos transformados es equivalente a tomar alternativas, para los datos sin transformar, que tienen respecto a la distribución de la hipótesis nula: cola más liviana a derecha, ambas colas más livianas y ambas colas mas pesadas respectivamente. Para ello, se introduce la noción de densidad relativa.

2.9.1 Densidad relativa y familias A, B y C

Sea F_0 la distribución bajo H_0 totalmente especificada, F una distribución cualquiera y $R=F_0(X)$. Entonces, la distribución relativa $G(r)$ está dada por:

$$G(r) = P(R \leq r) = P(F_0(x) \leq r) = P(x \leq F_0^{-1}(r)) = F(F_0^{-1}(r)), \text{ para } 0 < r < 1, \text{ donde}$$

$$F_0^{-1}(r) = \inf \{y / F_0^{-1}(y) > r\}.$$

Si F y F_0 coinciden, la distribución de $R=F_0(X)$, $G(r)$, es $U(0,1)$.

Cuando F y F_0 difieren, y la distribución de la hipótesis nula es la $U(0,1)$, resulta que $G \equiv F$.

Si f y f_0 son las densidades correspondientes a las distribuciones acumuladas F y F_0 respectivamente, se tiene que la variable aleatoria R tiene densidad, llamada densidad relativa, que está dada por la siguiente expresión:

$$g(r) = \frac{f(F_0^{-1}(r))}{f_0(F_0^{-1}(r))}.$$

A través de $g(r)$ se puede interpretar la relación entre la distribución bajo H_0 y la distribución F seleccionada como alternativa. Para aquellos valores de r donde $g(r) > 1$, se cumple que $f(F_0^{-1}(r)) > f_0(F_0^{-1}(r))$, o sea que f es mayor que f_0 en los puntos $x = F_0^{-1}(r)$. Si en cambio, $g(r) < 1$, la función f es menor que f_0 en los puntos $x = F_0^{-1}(r)$, y si $g(r)$ toma valores próximos a 1, f y f_0 se mantienen cercanas en los puntos mencionados.

Se describen las familias propuestas por Stephens (1974), se verá qué forma tienen y cómo son en relación a la distribución uniforme. Estas familias dependen de un parámetro de forma k .

La FDA de un miembro de la familia A está dada por:

$$F_A(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } z < 0 \\ 1 - (1 - z)^k & , \text{ si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & , \text{ si } 1 < z. \end{cases}$$

Se supone que la distribución de los datos es F , la planteada en la hipótesis nula es F_0 y que su densidad relativa, $g(r)$, pertenece a la familia A, o sea:

$$g(r) = k(1-r)^{k-1} \quad , \quad \text{para } 0 \leq r \leq 1.$$

Cuando $k = 1$, $g(r)$ es la densidad $U(0,1)$.

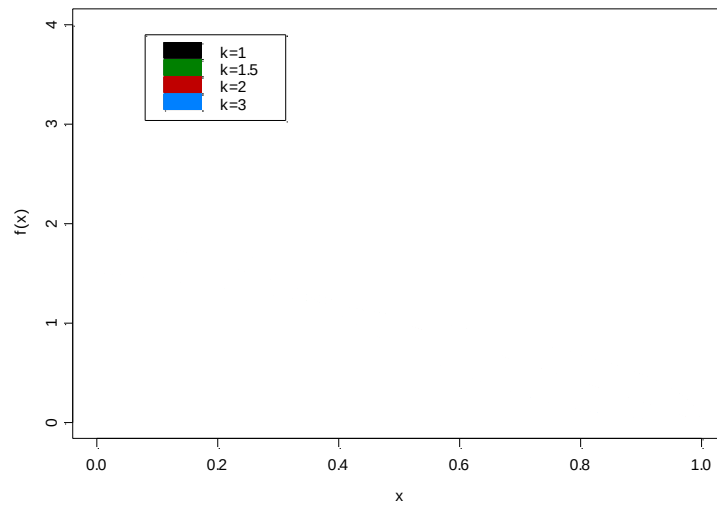


Figura 2.9 Gráfico de densidades pertenecientes a la familia tipo A para valores de $k = 1, 1.5, 2$ y 3 .

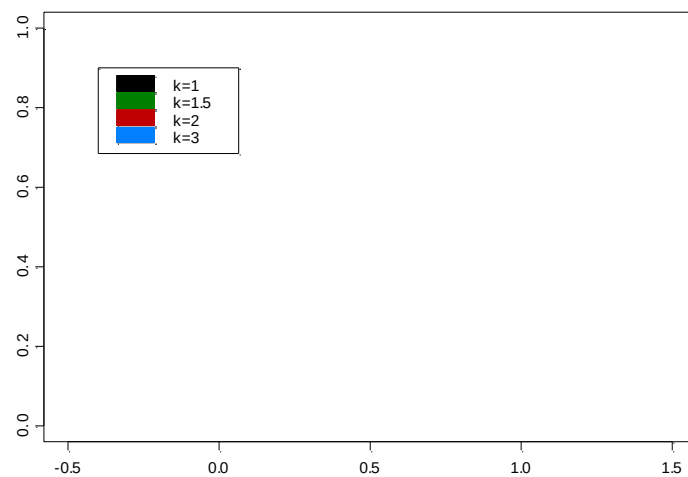


Figura 2.10. Gráfico de FDA pertenecientes a la familia tipo A para valores de $k = 1, 1.5, 2$ y 3 .

Como puede apreciarse en Figura 2.9, las curvas de las densidades relativas cortan la recta $y=1$ en:

$$\begin{aligned} r_{1.5} &= 1 - (2/3)^2 = 5/9 = 0.556, & \text{para } k = 1.5, \\ r_2 &= 0.5, & \text{para } k = 2, \\ r_3 &= 1 - (1/3)^{0.5} = 0.423, & \text{para } k = 3. \end{aligned}$$

La densidad f es menor que la de f_0 para los puntos $x = F_0^{-1}(r)$ donde $g(r) < 1$. Esto indica una cola hacia la derecha más liviana que la cola de la distribución bajo H_0 , ya que a partir de dichos puntos la f es menor que f_0 . Si se considera, por ejemplo el caso $k = 2$. A partir de $F_0^{-1}(r) = 0.5$, f resulta menor que f_0 .

Desde Figura 2.10, para el caso $k = 2$, si $F_0 \sim N(0,1)$, como $\Phi^{-1}(0.5) = 0$, f es menor que la densidad normal estándar desde el 0 y por lo tanto f tiene cola hacia la derecha más liviana que la normal.

Por lo tanto un test potente para una alternativa perteneciente a la familia A permite detectar alejamientos de la distribución en H_0 , con cola más liviana por derecha.

La FDA y la fdp de un miembro de la familia B están dadas respectivamente por:

$$F_B(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } z < 0 \\ 2^{k-1} z^k & , \text{ si } 0 \leq z \leq 0.5 \\ 1 - 2^{k-1} (1-z)^k & , \text{ si } 0.5 \leq z \leq 1 \\ 1 & , \text{ si } 1 < z, \end{cases}$$

$$f_B(y) = \begin{cases} (2)^{k-1} k z^{k-1} & , \text{ si } 0 \leq z \leq 0.5 \\ (2)^{k-1} k (1-z)^{k-1} & , \text{ si } 0.5 \leq z \leq 1 \\ 0 & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

También en el caso de la familia B, si $k = 1$ la distribución es $U(0,1)$.

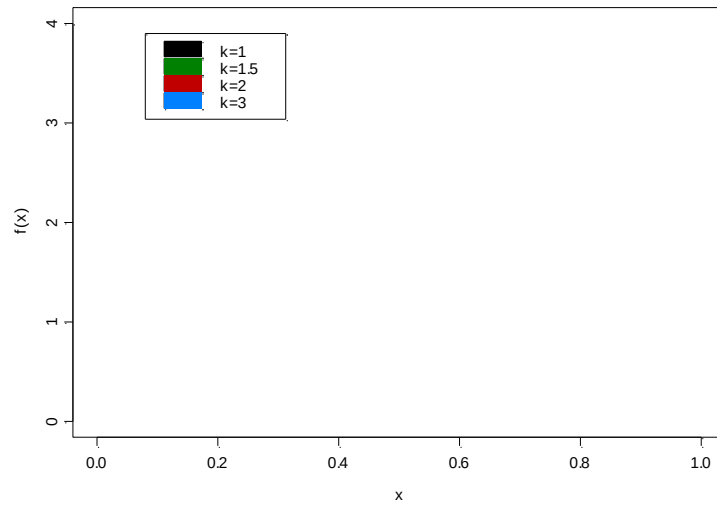
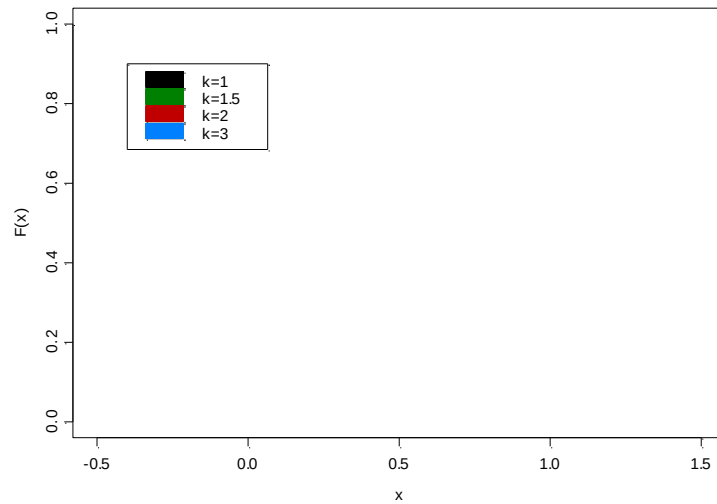


Figura 2.11. Gráfico de fdp de la familia B para valores de k= 1, 1.5, 2 y 3.



Figuras 2.12. Gráfico de FDA de la familia B para valores de k= 1, 1.5, 2 y 3.

Desde Figura 2.11, para los valores de k graficados, las densidades relativas cortan la recta $y=1$ en dos puntos, uno menor y uno mayor que 0.5:

$$\begin{aligned}
 r_{1.5} &= 0.5 \cdot (2/3)^2 = 0.222 & y & \quad r_{1.5} = 1 - r_{1.5} = 0.778, & \text{para } k &= 1.5, \\
 r_2 &= (0.5)^2 = 0.25 & y & \quad r_2 = 1 - r_2 = 0.75, & \text{para } k &= 2, \\
 r_3 &= 0.5 \cdot (1/3)^{0.5} = 0.289 & y & \quad r_3 = 1 - r_3 = 0.712, & \text{para } k &= 3.
 \end{aligned}$$

Si las densidades relativas que se obtienen pertenecen a la familia tipo B, la distribución bajo la alternativa tendrá colas más livianas que la distribución bajo H_0 , ya que para valores menores que los $x_i = F_0^{-1}(r_i)$ o mayores que $x_i = F_0^{-1}(1-r_i)$, la f es menor que la f_0 . Si la distribución nula es $N(0,1)$, f tendrá colas más livianas que la normal.

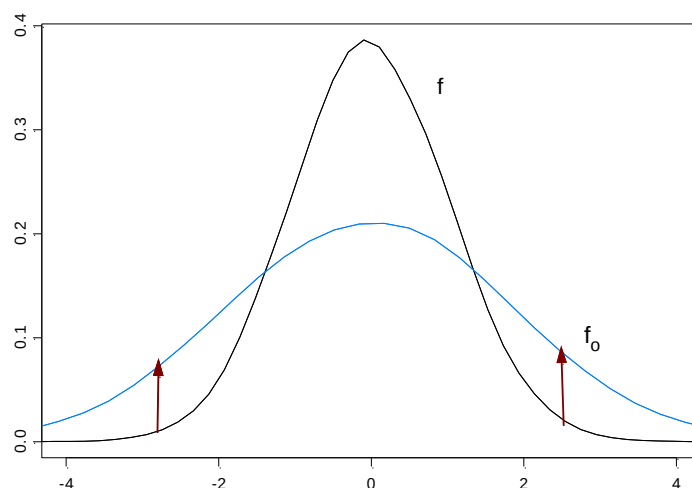


Figura 2.13. Gráfico de dos densidades, se indica donde la densidad f es menor que la densidad f_0 .

Por lo tanto, un test potente para una alternativa perteneciente a la familia B permite detectar alejamientos de la distribución en H_0 , con colas más livianas. En Figura 2.13 se ha graficado esta situación.

Finalmente, la FDA y la fdp de un miembro de la familia C están dadas respectivamente por:

$$F_C(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } z < 0 \\ 0.5 - 2^{k-1}(0.5 - z)^k & , \text{ si } 0 \leq z \leq 0.5 \\ 0.5 + 2^{k-1}(z - 0.5)^k & , \text{ si } 0.5 \leq z \leq 1 \\ 1 & , \text{ si } z > 1, \end{cases}$$

$$f_C(y)=\begin{cases} (2)^{k-1}k(0.5-z)^{k-1} & , \text{ si } 0 \leq z \leq 0.5 \\ (2)^{k-1}k(z-0.5)^{k-1} & , \text{ si } 0.5 \leq z \leq 1 \\ 0 & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

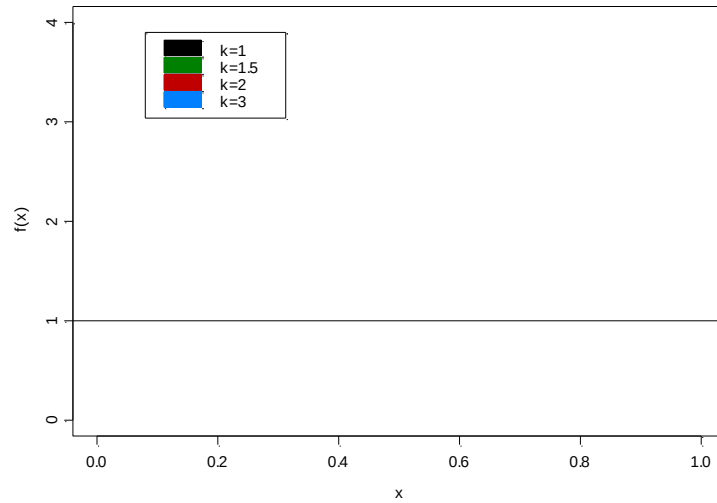


Figura 2.14. Gráfico de fdp de 3 miembros de la familia C para valores de $k = 1, 1.5, 2$ y 3 .

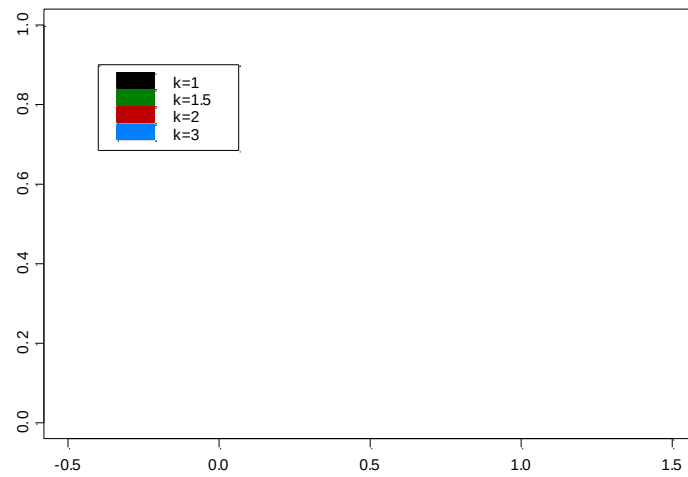


Figura 2.15. Gráfico de FDA de 3 miembros de la familia C para valores de $k = 1, 1.5, 2$ y 3 .

Desde Figura 2.14, se observa nuevamente que cuando $k = 1$, se obtiene la distribución $U(0,1)$, vale decir que esta distribución está contenida en las tres familias A, B y C. Para los valores de k analizados, las densidades cortan la recta $y=1$ en dos puntos, uno menor y uno mayor que 0.5:

$$\begin{array}{llll} r_{1.5}=0.5-0.5*(2/3)^2=0.27 & \text{y} & 1-r_{1.5}=0.73, & \text{para } k = 1.5, \\ r_2 = 0.5-(0.5)^2=0.25 & \text{y} & 1-r_2 = 0.75, & \text{para } k = 2, \\ r_3 = 0.5-0.5*(1/3)^{0.5}=0.211 & \text{y} & 1-r_3=0.789, & \text{para } k = 3. \end{array}$$

En este caso, lo que se observa, es que la distribución bajo H_1 tendrá colas más pesadas que la especificada en la hipótesis nula. Si la distribución nula es $N(0,1)$, la alternativa tendría colas más pesadas que la normal (además cuanto mayor el valor de k , más pesadas resultan, pues se observa la curva más alejada de la recta $y=1$).

Por lo tanto un test potente para una alternativa perteneciente a la familia C permite detectar alejamientos de la distribución en H_0 , con colas más pesadas.

2.9.2 Estudio de la potencia de los tests planteados

Para estudiar la potencia de los tests planteados, se consideraron alternativas tales que la densidad relativa perteneciese a una de las familias A, B y C. Se consideraron tamaños de muestra $N = 10, 20, 40, 60, 80$ y 100 . Mediante simulaciones por el método de Monte Carlo con 10000 replicaciones, se obtuvieron los porcentajes de rechazo que se presentan en las Tablas 2.9.1 y 2.9.2. En este caso, la hipótesis nula es que la distribución es $U(0,1)$.

La Tabla 2.9.1 replica lo realizado por Michael (1983) en base a 1000 replicaciones y consigna la potencia estimada, en porcentaje, cuando las alternativas pertenecen a las familias A, B o C con distintos valores de k . El nivel de significación empleado fue 0.1. La Tabla 2.9.2 contiene la potencia estimada en porcentaje, cuando las alternativas pertenecen a las familias A, B o C, con los mismos

valores de k considerados en la Tabla 2.9.1 y tamaños muestrales mayores.

Tabla 2.9.1. Potencia estimada en porcentaje con alternativas pertenecientes a las familias A, B o C, para tamaños de muestra 10, 20 y 40.

Familia	k	N=10		N=20		N=40	
		D	DSP	D	DSP	D	DSP
A	1,5	24	26	40	41	65	67
	2	53	55	81	83	98	98
	3	90	91	100	100	100	100
B	1,5	9	14	13	26	21	48
	2	12	25	26	55	58	89
	3	24	51	66	93	98	100
C	1,5	19	17	24	18	35	26
	2	31	28	46	38	72	63
	3	54	52	81	77	99	98

Tabla 2.9.2. Potencia estimada en porcentaje con alternativas pertenecientes a las familias A, B o C, para tamaños de muestra 60, 80 y 100.

Familia	k	N=60		N=80		N=100	
		D	DSP	D	DSP	D	DSP
A	1,5	82	73	90	85	96	93
	2	100	100	100	100	100	100
	3	100	100	100	100	100	100
B	1,5	33	51	44	65	56	77
	2	83	95	94	99	99	100
	3	100	100	100	100	100	100
C	1,5	46	22	57	30	67	37
	2	89	66	97	83	99	92
	3	100	100	100	100	100	100

Comparando las potencias obtenidas, se puede concluir que el test basado en DSP es más potente que el basado en D en el caso de la familia B para todos los tamaños de muestra analizados, mientras que ambos tienen potencia similar en el caso de las familias A. Para la familia C es algo más potente el test basado en D sobre todo para valores de k pequeños.

Stephens (1974) estudió la potencia de los tests basados en estadísticos de tipo cuadrático, como el test basado en D , el V de Kuiper y χ^2 de Pearson, mediante simulación en base a 1000 replicaciones y tamaños muestrales 10, 20 y 40. Comparando la potencia obtenida por Stephens (1974) y las obtenidas en la Tabla 2.9.1, se concluye que el test basado en D es más potente que el basado en W^2 en el caso de la familia B. También los tests basados en los estadísticos D y DSP resultaron más potentes que el test basado en el estadístico V de Kuiper en el caso de la familia A, pero el test basado en W^2 resultó más potente en este caso. Para la familia C, resultó más potente el test basado en el estadístico U^2 de Watson y el basado en V tuvo potencia similar a este último.

Se puede concluir entonces que, entre todos los tests estudiados incluyendo el basado en DSP , no es posible establecer un test que resulte más potente. La desventaja de los tests analizados de tipo cuadrático consiste en que las regiones de aceptación no pueden representarse en un gráfico de probabilidad tal como se ha visto con los estadísticos D y DSP .

Capítulo 3

Test de bondad de ajuste a una distribución completamente especificada en el caso de muestras censuradas.

En este capítulo, se extenderán los tests planteados en el capítulo anterior a casos de muestras con censura simple. En particular, se propondrá un test basado en el estadístico *DSP*.

3.1 Muestras censuradas

3.1.1 Introducción

En muchas situaciones prácticas se presentan muestras donde no es posible obtener la información de todas las unidades muestrales o no es posible relevar enteramente los datos de las unidades de análisis. Estas muestras se denominan "censuradas".

En algunas ocasiones se trata de pocos casos censurados, pero en otras las restricciones en el muestreo son severas y se deben tener en cuenta para realizar el análisis.

Así, muestras censuradas son aquellas para las cuales se conoce y se identifica el número de individuos cuyas características no se han podido incluir en la muestra. Las muestras censuradas muchas veces se presentan en experimentos de sobrevivencia, donde, por ejemplo, el estudio finaliza con anterioridad a la falla o muerte de todos los elementos que componen la muestra.

Stevens (1937) derivó estimadores de máxima verosimilitud para muestras con censura simple, conocidas actualmente como de tipo I. Los tipos de muestreos censurados y los modos de censura serán definidos en la próxima sección.

3.1.2 Definiciones básicas

Las muestras censuradas son simples cuando sólo se pueden observar completamente los valores mayores (o los menores) de una muestra ordenada, y se clasifican en tipo I y tipo II.

Se llamará, según las notaciones empleadas por Cohen (1991, pág.4),

N : Tamaño de la muestra

n : Número total de observaciones completas.

$c=N-n$: Número de observaciones censuradas.

$p=\frac{n}{N}$: Razón o fracción de censura.

Los tipos de muestreo censurados que se verán son dos. El primero, se denomina tipo I y ocurre cuando el valor de n es aleatorio. El segundo se llama de tipo II y ocurre cuando, por el contrario, n es un valor fijo y conocido de antemano.

A continuación se definen los modos de censura.

1. **Observaciones con censura simple a izquierda:** consisten en un total de N observaciones de las cuales n son completas y $c=N-n$ son censuradas. Para cada observación censurada se sabe que $x < T$, mientras que para cada observación completa $x \geq T$. En la censura de tipo I, T es un punto de censura fijo y conocido, en las de tipo II $T = x_{(c+1)}$, es decir es el $c+1$ -estadístico de orden en la muestra de tamaño N .
2. **Observaciones con censura simple a derecha:** consisten en un total de N observaciones de las cuales n son completas y $c=N-n$ son censuradas. Para cada observación censurada se sabe que $x > T$, mientras que para cada observación completa $x \leq T$. En la censura de tipo I, T es un punto de censura fijo y conocido, en las de tipo II $T = x_{(n)}$, es decir es el n -estadístico de orden en la muestra de tamaño N , o sea el máximo de las observaciones completas.
3. **Observaciones con censura doble o por intervalo:** consisten en N observaciones de las cuales sólo n son completamente observadas y cada observación completa se encuentra en un intervalo $T_1 \leq x \leq T_2$. Hay c_1 observaciones censuradas de las cuales se sabe que $x < T_1$ y c_2 observaciones censuradas de las cuales se sabe que $x > T_2$. El total de la muestra es $N = n + c_1 + c_2$. En el caso de censura de tipo I, tanto T_1 como T_2 son constantes conocidas. En las muestras con censura de tipo II resulta que $T_1 = x_{(c_1+1)}$ y $T_2 = x_{(c_1+n)}$, o sea son variables aleatorias.

Como ya se mencionó, en muestras con censura de tipo I, los límites son conocidos (fijos) siendo n y c valores observados de variables aleatorias. Mientras que para el tipo II, N , n y c son valores fijos y los límites son variables aleatorias que representan estadísticos de orden.

Un ejemplo de tipo de censura simple se tiene cuando se mide la duración X de ciertos equipos electrónicos. Si el experimento continúa hasta un tiempo fijo T , el número de ítems que fallan en dicho tiempo es una variable aleatoria y el tipo de censura será de tipo I. Si en cambio el experimento continúa hasta que n unidades fallen, entonces el número de observaciones completas es fijo y el tipo de censura es tipo II. Estos tipos de censura se suelen conocer también como censura de tiempo y censura de fallas, respectivamente. Existen otros esquemas de censura más complicados, como censura progresiva, censura múltiple y censura aleatoria.

En este trabajo se abordarán los casos de muestras con censura simple de tipo I y de tipo II, tanto a la izquierda como a la derecha.

En estos casos, las observaciones en la muestra censurada siguen siendo estadísticos de orden de una muestra aleatoria y se pueden realizar los gráficos QQ , PP y DSP . Si bien sólo se puede graficar una porción de las observaciones de la muestra proveniente de una distribución hipotética, las observaciones graficadas no censuradas siguen teniendo la misma posición que en la muestra completa. La diferencia es que las observaciones censuradas no aparecen. Los cuantiles correspondientes se deben calcular apropiadamente, como se verá en las secciones siguientes.

En Figura 3.1. (lado izquierdo) se presenta el gráfico QQ de una muestra de tamaño 30 de una distribución t con 4 grados de libertad cuyos datos se encuentra en Apéndice 3. En Figura 3.1 (lado derecho) se presenta el gráfico QQ de la muestra censurada a la derecha de tipo II obtenida eliminando las últimas 10 observaciones de la muestra graficada a izquierda.

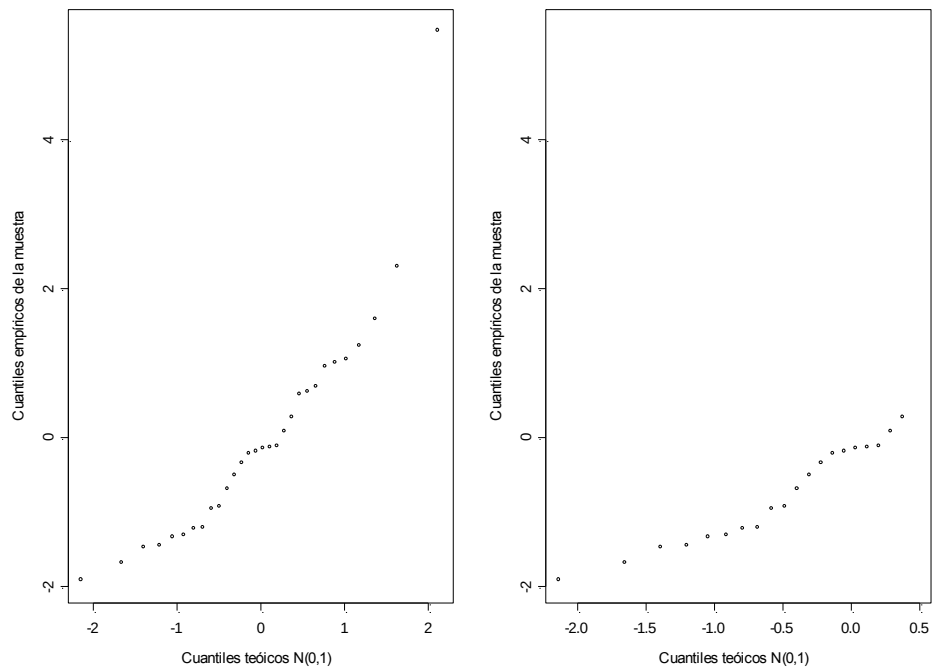


Figura 3.1. Gráficos QQ de una muestra completa y de la muestra con censura simple a derecha de tipo II.

Este procedimiento puede emplearse en censura simple tanto de tipo I como de tipo II. Sin embargo, en tipo I, como hay una información adicional que es el punto o tiempo de censura, éste puede ser incorporado al gráfico del siguiente modo sugerido por Nelson (1973):

Sea T el tiempo de censura y que hay n observaciones que resultan menores o iguales que T . Entonces,

- Se grafican los puntos $(G^{-1}(p_i), X_{(i)})$, para $i=1,2,\dots,n$.
- Resulta entonces $X_{(n+1)} > T$.
- Se agrega al gráfico el punto $(G^{-1}(p_{n+1}), T)$ con un símbolo diferente por ejemplo una flecha hacia arriba, indicando el valor a partir del cual podría encontrarse $X_{(n+1)}$.

Si en el ejemplo anterior, se considera censura tipo I con $T = 0.9$, entonces hay 23 observaciones en la muestra menores que este valor y si se grafica según el criterio anterior obteniendo Figura 3.2.

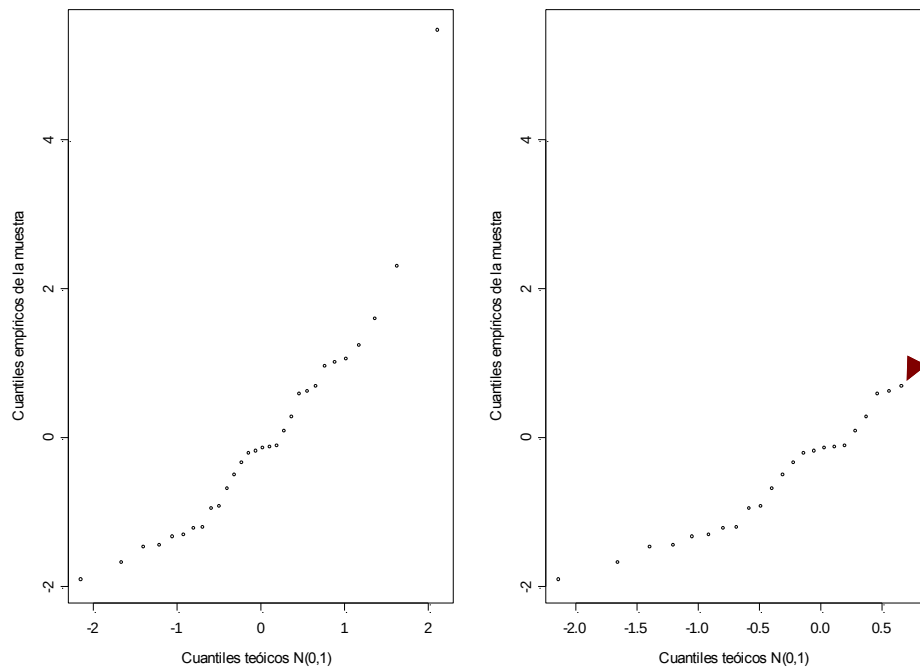


Figura 3.2. Gráficos *QQ* de una muestra completa y de una censurada con censura simple a derecha de tipo I, con punto de censura fijo en 0.9.

3.2 Test de bondad de ajuste a una distribución completamente especificada en el caso de muestras censuradas

Se tiene una muestra con censura simple a la derecha de tamaño N de una distribución F y sean $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ las n observaciones completas. Las hipótesis nula y alternativa son:

$$H_0: F(x) \equiv F_0(x)$$

$$H_1: F(x) \neq F_0(x)$$

Donde $F_0(x)$ tiene parámetros conocidos de locación y escala, μ y σ , respectivamente.

Como la distribución nula está completamente especificada, aplicando la denomina transformación integral de probabilidad, es decir:

$$U_{(i)} = F_0\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Resulta que bajo H_0 la muestra $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$ es una muestra censurada de una distribución $U(0,1)$.

En el caso de censura de tipo I, se sabe que los valores X_i son menores que un valor fijo T_x y los valores transformados resultarán entonces menores que $T = F_o(T_x)$.

Esto muestra que el problema se reduce, como en los casos de muestras completas, a considerar como F_o la distribución $U(0,1)$, trabajando sobre los datos transformados según la fórmula dada en (3.1).

3.2.1 Tests basados en el estadístico K-S para muestras censuradas

Se consideran las hipótesis

$$H_0: F(x) \equiv F_o(x)$$

$$H_1: F(x) \neq F_o(x) \quad (3.2)$$

siendo F_o la distribución $U(0,1)$.

Se utiliza en primer lugar el estadístico de Kolmogorov-Smirnov y siguiendo las definiciones brindadas en 3.1.2.

Se considera en primer lugar el caso de censura de tipo I, simple y a la derecha. Sean $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)} < T$ las observaciones completas de una muestra aleatoria censurada ordenada $U(0,1)$ de tamaño N , el estadístico K-S en este caso está definido por:

$$D_{T,N} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{N} - u_{(i)}, u_{(i)} - \frac{i-1}{N}, T - \frac{n}{N} \right\}. \quad (3.3)$$

Los sub-índices indican el tipo de censura y que el estadístico depende del punto de censura fijo y del tamaño de la muestra.

En el caso de censura de tipo II, simple y a la derecha, se tiene que hay n valores completos $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$ donde $U_{(n)}$ es el máximo y n es fijo. El estadístico K-S está definido de la siguiente forma en este caso:

$$2D_{n,N} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i-0.5}{N} - u(i) \right| \right\} + \frac{0.5}{N} \quad (3.4)$$

El estadístico K-S depende del tamaño de la muestra y del número total de observaciones completas.

Los estadísticos presentados en (3.3) y (3.4) de K-S (D'Agostino, 1986, página 111) se conocen también como estadísticos modificados de K-S.

Con los estadísticos dados en (3.3) y (3.4) se testean las hipótesis planteadas en (3.2). El valor de estos estadísticos se compara con los valores de percentiles que se obtienen desde las Tablas A3 o A4, según corresponda en cada caso. Se rechaza H_0 para un nivel de significación α si el valor observado del estadístico supera el $1-\alpha$ cuantil consignado en la tabla correspondiente.

En el caso de censura de tipo II, la tabla se consulta con $p = \frac{n}{N}$ y en el caso de censura de tipo I, la respectiva tabla se consulta con $p = T$.

La distribución aproximada de los estadísticos definidos en (3.3) y (3.4) bajo H_0 , fue estudiada por Dufour and Maag (1978). Los autores proveen fórmulas que permiten utilizar dicha distribución en el caso de muestras finitas y presentan dos tablas que contienen algunos percentiles para tamaños de muestra $N=10, 15, 20$ y 25 .

También Barr and Davidson (1973) han estudiado este test y presentan tablas de la FDA de dichos estadísticos, pero no los cuantiles por lo que resultan trabajosas para utilizar en la práctica.

Los autores D'Agostino y Stephens (1986, página 112) presentan una tabla que contiene los percentiles para la distribución asintótica de ambos estadísticos, que pueden ser utilizados para tamaños de muestra mayores o iguales a 25 y valores p de razón de censura desde 0.2 hasta 1. También consignan tablas de percentiles de otros estadísticos propuestos para el caso de muestras con censura. Se trata de los estadísticos W^2 de Cramer-von Mises y de A^2 de Anderson-Darling con las definiciones correspondientes para muestras con censura simple de tipo I o de tipo II.

Mediante simulaciones de Monte-Carlo, empleando 10000 replicaciones para cada tamaño de muestra considerado, se han obtenido los

cuantiles de la distribución de los estadísticos definidos en (3.3) y (3.4) bajo H_0 . Estos resultados están consignados en Tablas A3 y A4 de Apéndice 1. Los valores que se han obtenido dan muy buena precisión comparados con los valores de los percentiles dados por Dufour and Maag (1978).

3.2.2 Tests basados en el estadístico DSP para muestras censuradas

Como ya se ha mencionado en Sección 2.9, los tests basados en estadísticos de tipo cuadrático resultan en general más potentes que el test basado en D , para detectar algunas hipótesis alternativas. Se proponen otros estadísticos basados en el DSP definido en la Sección 2.5, para realizar los tests de bondad de ajuste en el caso de muestras con censura simple. Se compara luego la potencia de los tests basados en los estadísticos que se proponen a continuación, con la potencia de los tests basados en D .

En el caso de censura de tipo I, el estadístico propuesto es:

$${}_1DSP_{T,N} = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \arcsen \left[\left(\frac{i-0.5}{N} \right)^{0.5} \right] - \arcsen(u_{(i)}^{0.5}) \right| \right\}, \frac{2}{\pi} \left| \arcsen \left[\left(\frac{n-0.5}{N} \right)^{0.5} \right] - \arcsen(T^{0.5}) \right| \right\}, \quad (3.5)$$

y para censura de tipo II, es:

$${}_2DSP_{n,N} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \arcsen \left[\left(\frac{i-0.5}{N} \right)^{0.5} \right] - \arcsen(u_{(i)}^{0.5}) \right| \right\}. \quad (3.6)$$

Mediante simulaciones de Monte Carlo en base a 10000 replicaciones, se estudió la distribución de estos estadísticos bajo H_0 , para tamaños de muestra de 10 a 100, con paso 5, y distintos valores p desde 0.1 a 1 con paso 0.1.

Los resultados han sido consignados en Tablas A5 y A6 del Apéndice 1 según se trate de censura de tipo I o de tipo II. En la próxima sección se comparará la potencia de estos tests propuestos con los de K-S para muestras censuradas.

Una vez definidos estos estadísticos se pueden realizar los tests propuestos siguiendo los siguientes pasos, suponiendo $\theta=(\mu,\sigma)$ vector que contiene los parámetros de locación y escala:

1. Calcular $U_{(i)}=F_o\left(\frac{X_{(i)}-\mu}{\sigma}\right)$, para $i=1,2,\dots,n$.
2. Utilizando $U_{(i)}$ obtener los estadísticos correspondientes, según se trate de censura simple de tipo I o de tipo II, de acuerdo a las definiciones (3.5) y (3.6)
3. El valor de estos estadísticos se compara con los valores de percentiles que se obtienen desde Tablas A5 o A6, según corresponda en cada caso. Se rechaza H_o para un nivel de significación α si el valor observado del estadístico supera el $1-\alpha$ cuantil consignado en la tabla correspondiente.

Tal como en el caso de los estadísticos basados en D , en el caso de censura de tipo II, la tabla se consulta con $p=\frac{n}{N}$ y en el caso de censura de tipo I, la respectiva tabla se consulta con $p=T$.

Se ha desarrollado un programa que calcula, para una muestra censurada dada y tamaño de muestra total N , los estadísticos ${}_1D_{T,N}$, ${}_1^{DSP}_{T,N}$, ${}_2D_{n,N}$ y ${}_2^{DSP}_{n,N}$, para los casos de censura de tipo I o de tipo II. Este programa se encuentra en Apéndice 2.

Observación:

Se puede convertir una muestra con censura a la izquierda en una a derecha invirtiendo el orden de la muestra (ver por ejemplo D'Agostino y Stephens, 1986, pág. 115), es decir, se toma $U_{(i)}^*=1-U_{(n+1-i)}$, para $i=1,2,\dots,n$. Luego se utilizan los tests dados para censura a la derecha.

Cuando la censura es de tipo I, el valor de censura a la izquierda T , se convierte en $T^*=1-T$ a la derecha para ser usado con los valores transformados U^* . De modo que basta calcular los percentiles de las distribuciones de los estadísticos sólo en el caso de censura a derecha.

3.3 Bandas de aceptación derivadas de los tests presentados en Sección 3.2

En forma análoga a lo que se realizó para derivar las bandas de aceptación a partir de los tests de bondad de ajuste a una distribución completamente especificada en Sección 2.7, se pueden también construir bandas de aceptación para los gráficos *PP* y *DSP* utilizando los percentiles de la distribución de los estadísticos para los tests planteados en Sección 3.2. Es decir, regiones tales que si todos los puntos graficados se encuentran dentro de ellas no se rechaza la hipótesis nula. Esto permitirá realizar tests visuales de bondad de ajuste.

Como ya se señaló, aplicar los tests con un nivel de significación α y trazar los gráficos respectivos para ver si todos los puntos caen dentro de la región de aceptación de nivel $1-\alpha$ resultan equivalentes. Esta posibilidad da una ventaja frente a otros tests para muestras censuradas, como son los del tipo cuadrático.

Tal como se hizo en Sección 2.7 y en el caso de censura de tipo II, se tiene que, según (3.4) y (3.6):

Llamando $U_{(i)} = F_o\left(\frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$, para $i=1,2,\dots,n$, entonces

$${}_2D_{n,N} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i-0.5}{N} - u_{(i)} \right| \right\} + \frac{0.5}{N} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |t_i - u_i| \right\} + \frac{0.5}{N} \quad (3.7)$$

y

$${}_2DSP_{n,N} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{2}{\pi} \arcsen \left[\left(\frac{i-0.5}{N} \right)^{0.5} \right] - \arcsen(u_{(i)}^{0.5}) \right| \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{2}{\pi} \arcsen \left[(t_i)^{0.5} \right] - \arcsen(u_i^{0.5}) \right| \right\} =$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |r_i - s_i| \right\} \quad (3.8)$$

Se rechaza H_0 para un nivel de significación α si el valor observado del estadístico es mayor que el percentil correspondiente, que en el caso del estadístico ${}_2DSP_{n,N}$ se denota por ${}_2dsp_{n,N,1-\alpha}$.

Entonces:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad |r_i - s_i| \leq {}_2dsp_{n,N,1-\alpha} \quad , \quad \text{o sea,}$$

$$-\frac{\pi}{2} {}_2dsp_{n,N,1-\alpha} \leq \arcsen(t_i^{0.5}) - \arcsen(u_i^{0.5}) \leq \frac{\pi}{2} {}_2dsp_{n,N,1-\alpha} .$$

Como $0 \leq u_i \leq 1$, entonces se tiene que,

$$\max \left\{ \arcsen^2(t_i^{0.5}) - \frac{\pi}{2} {}_2dsp_{n,N,1-\alpha}, 0 \right\} < u_i < \min \left\{ \arcsen^2(t_i^{0.5}) + \frac{\pi}{2} {}_2dsp_{n,N,1-\alpha}, 1 \right\} \quad (3.9)$$

La fórmula (3.9) define las curvas de la región de aceptación en el gráfico *PP* derivadas del estadístico *DSP*.

Al aplicar el test K-S, no se rechaza H_0 para un nivel de significación α , si el valor observado del estadístico es menor o igual que el percentil correspondiente, que en este caso se denota ${}_2d_{n,N,1-\alpha}'$, es decir, si

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad |t_i - u_i| + \frac{0.5}{N} \leq {}_2d_{n,N,1-\alpha} \quad , \text{ o equivalentemente,} \\ t_i - {}_2d_{n,N,1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \leq u_i \leq t_i + {}_2d_{n,N,1-\alpha} - \frac{0.5}{N} . \quad (3.10)$$

Luego para el gráfico *PP*, en el cual el eje de las abscisas se grafican las t_i , las bandas definidas en base al estadístico *D* resultan limitadas por dos rectas como se observa en (3.10), siempre que no sean mayores que uno o menores que cero, por lo que formalmente se expresan como:

$$\max \left\{ t_i - {}_2d_{n,N,1-\alpha} + \frac{0.5}{N}, 0 \right\} \leq u_i \leq \min \left\{ t_i + {}_2d_{n,N,1-\alpha} - \frac{0.5}{N}, 1 \right\} .$$

Para el gráfico *DSP*, se tiene que, $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$r_i - {}_2dsp_{n,N,1-\alpha} \leq s_i \leq r_i + {}_2dsp_{n,N,1-\alpha} . \quad (3.11)$$

Como se grafican los s_i sobre el eje de las ordenadas, resulta que las regiones de aceptación basadas en el estadístico *DSP* están dadas en este caso por rectas.

Por último, se obtienen las curvas para el gráfico *DSP* para el caso del test dado por el estadístico *D* a partir de (3.7), tal como en Sección 2.7, esto es,

$$t_i - {}_2d_{n,N,1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \leq Z_{(i)} \leq t_i + {}_2d_{n,N,1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \quad , \quad \text{si y sólo si,}$$

$$\max \left\{ \frac{2}{\pi} \arcsen \left[\left(\text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} r_i \right) - {}_2d_{n,N,1-\alpha} + \frac{0.5}{N} \right)^{0.5} \right], 0 \right\} \leq \frac{2}{\pi} \arcsen(Z_{(i)}^{0.5}) \leq$$

$$\leq \min \left\{ \frac{2}{\pi} \arcsen \left[\left(\text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} r_i \right) + {}_2d_{n,N,1-\alpha} - \frac{0.5}{N} \right)^{0.5} \right], 1 \right\} . \quad (3.12)$$

La expresión (3.12) se obtuvo teniendo en cuenta que las bandas deben estar acotadas entre 0 y 1, y las expresiones dadas en Tabla 1.2.

Observación: en el caso de censura de tipo I, también se puede realizar el trazado de las bandas, pero hay que tener en cuenta, de acuerdo a (3.3) y (3.5) que para no rechazar la hipótesis nula, además de las *n* observaciones completas consideradas, también tiene que caer dentro de las bandas el punto $(\frac{n-0.5}{N}, T)$.

Como ejemplificación de lo desarrollado, se trazarán las bandas de aceptación en el caso de Muestra 1 de Ejemplo 2.8.1, habiendo censurado al 50 %.

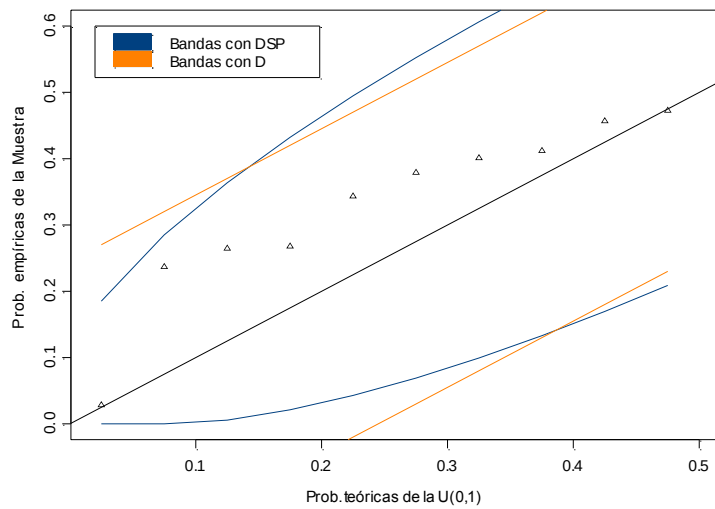


Figura 3.3. Gráfico *PP* de la muestra censurada de tamaño 10 con bandas de aceptación del 95% derivadas de los tests de Sección 3.2.

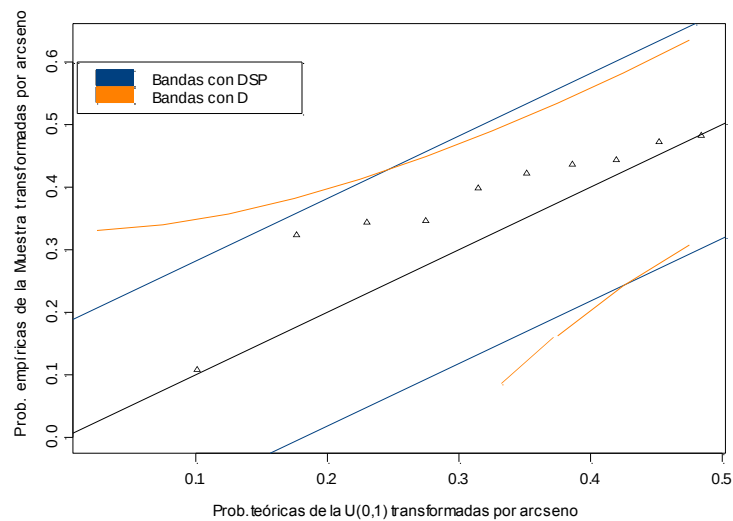


Figura 3.4. Gráfico *DSP* de la muestra censurada de tamaño 10 con bandas de aceptación del 95% derivadas de los tests de Sección 3.2.

Se puede observar que para $\alpha=0.05$, no se rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de una distribución $N(0,1)$. También se observa que los gráficos son similares a los trazados en el caso de la muestra completa, sólo que no aparece la parte del gráfico que corresponde a los valores censurados de la muestra, quedando sólo las 10 observaciones menores, que son las observaciones completas.

3.4 Potencia de los tests planteados en Sección 3.2

Se estudiará la potencia de los tests que se han propuesto en Sección 3.2 para muestras censuradas. Para estimar dicha potencia se utilizaron como hipótesis alternativas distribuciones pertenecientes a las familias A y B, y el método de Monte Carlo con 10000 replicaciones y distintos tamaños muestrales. También es de interés conocer la potencia que brinda el test equivalente de K-S para muestras censuradas definido en Sección 3.2.1, ya que no se ha encontrado bibliografía donde se estudie la potencia de este test como tampoco de otros tests basados en estadísticos de tipo cuadrático para muestras censuradas. Es de esperar que no resulte siempre más potente, como no lo es en el caso de muestras sin censura, según se ha visto en Sección 2.9.

Para estudiar la potencia de los tests definidos en Sección 3.2.1 y Sección 3.2.2, se generaron muestras de tamaño $N = 20, 30, 40, 50, 60$ y 100 con distribución perteneciente a alguna de las familias consideradas y se censuraron observaciones a la derecha. Para cada muestra censurada, se calcularon los estadísticos y se comparó su valor con los percentiles correspondientes al nivel de significación elegido $\alpha = 0.1$, dados en las Tablas de Apéndice 1: Tablas A3, A4, A5 y A6. En Tablas 3.4.1-3.4.4 se resume la información obtenida, que se presenta como porcentaje de muestras entre las 10000 replicaciones para las cuales se rechaza la hipótesis nula.

En Tablas 3.4.2 y 3.4.4, p representa distintos valores de razón de censura y en Tablas 3.4.1 y 3.4.3, T representa distintos valores de puntos de censura fijos. En ambos casos se consideraron los valores $0.2, 0.6$ y 0.9 .

En las Tablas 3.4.1 y 3.4.3 se presentan los resultados correspondientes al caso de censura tipo I a la derecha, considerando hipótesis alternativas en la familia A y en la familia B, respectivamente.

En Tablas 3.4.2 y 3.4.4 se presentan los resultados correspondientes al caso de censura tipo II a la derecha, considerando hipótesis alternativas en la familia A y en la familia B, respectivamente. En este caso $n = N \cdot p$ representa el número de observaciones completas siendo N el tamaño de muestra.

Tabla 3.4.1 .Censura tipo I

		Tamaño de muestra					
		N=20		N=30		N=40	
Distribución	T	$1^D_{T,N}$	$1^{DSP}_{T,N}$	$1^D_{T,N}$	$1^{DSP}_{T,N}$	$1^D_{T,N}$	$1^{DSP}_{T,N}$
Familia A k=1.5	0.2	29	26	37	21	40	26
Familia A k=2	0.2	56	37	70	51	78	62
Familia A k=3	0.2	90	79	97	93	99	97
Familia A k=1.5	0.6	42	34	54	46	63	55
Familia A k=2	0.6	82	75	93	90	97	95
Familia A k=3	0.6	99	99	100	100	100	100
Familia A k=1.5	0.9	40	41	53	55	66	70
Familia A k=2	0.9	82	82	94	95	98	99
Familia A k=3	0.9	100	100	100	100	100	100
		Tamaño de muestra					
		N=50		N=60		N=100	
Distribución	T	$1^D_{T,N}$	$1^{DSP}_{T,N}$	$1^D_{T,N}$	$1^{DSP}_{T,N}$	$1^D_{T,N}$	$1^{DSP}_{T,N}$
Familia A k=1.5	0.2	45	30	51	33	66	47
Familia A k=2	0.2	83	71	89	77	98	93
Familia A k=3	0.2	99	99	100	100	100	100
Familia A k=1.5	0.6	72	63	79	70	93	88
Familia A k=2	0.6	99	98	99	99	100	100
Familia A k=3	0.6	100	100	100	100	100	100
Familia A k=1.5	0.9	74	76	81	83	95	96
Familia A k=2	0.9	100	100	100	100	100	100
Familia A k=3	0.9	100	100	100	100	100	100

Tabla 3.4.2. Censura tipo II

		Tamaño de muestra					
		N=20		N=30		N=40	
Distribución	p	$2^D_{n,N}$	$2^{DSP}_{n,N}$	$2^D_{n,N}$	$2^{DSP}_{n,N}$	$2^D_{n,N}$	$2^{DSP}_{n,N}$
Familia A k=1.5	0.2	2	6	4	8	8	11
Familia A k=2	0.2	1	9	10	17	23	26
Familia A k=3	0.2	5	25	32	44	63	65
Familia A k=1.5	0.6	25	20	38	30	48	37
Familia A k=2	0.6	59	50	80	72	91	84
Familia A k=3	0.6	95	91	100	99	100	100
Familia A k=1.5	0.9	39	34	52	48	65	61
Familia A k=2	0.9	80	76	93	91	98	97
Familia A k=3	0.9	99	99	100	100	100	100
		Tamaño de muestra					
		N=50		N=60		N=100	
Distribución	p	$2^D_{n,N}$	$2^{DSP}_{n,N}$	$2^D_{n,N}$	$2^{DSP}_{n,N}$	$2^D_{n,N}$	$2^{DSP}_{n,N}$
Familia A k=1.5	0.2	11	13	16	16	33	27
Familia A k=2	0.2	34	35	46	43	79	70
Familia A k=3	0.2	80	79	91	89	99	99
Familia A k=1.5	0.6	57	46	67	54	87	78
Familia A k=2	0.6	96	92	99	97	100	100
Familia A k=3	0.6	100	100	100	100	100	100
Familia A k=1.5	0.9	74	70	80	77	97	94
Familia A k=2	0.9	99	99	100	100	100	100
Familia A k=3	0.9	100	100	100	100	100	100

Tabla 3.4.3. Censura tipo I

		Tamaño de muestra					
		N=20		N=30		N=40	
Distribución	T	$1^{D_{T,N}}$	$1^{DSP_{T,N}}$	$1^{D_{T,N}}$	$1^{DSP_{T,N}}$	$1^{D_{T,N}}$	$1^{DSP_{T,N}}$
Familia B k=1.5	0.2	6	23	18	35	24	44
Familia B k=2	0.2	12	39	42	63	59	79
Familia B k=3	0.2	16	39	52	60	69	72
Familia B k=1.5	0.6	14	21	17	31	19	39
Familia B k=2	0.6	25	43	38	65	49	79
Familia B k=3	0.6	61	83	84	97	94	99
Familia B k=1.5	0.9	13	24	16	37	23	50
Familia B k=2	0.9	27	54	42	76	62	91
Familia B k=3	0.9	67	92	90	99	98	100
		Tamaño de muestra					
		N=50		N=60		N=100	
Distribución	T	$1^{D_{T,N}}$	$1^{DSP_{T,N}}$	$1^{D_{T,N}}$	$1^{DSP_{T,N}}$	$1^{D_{T,N}}$	$1^{DSP_{T,N}}$
Familia B k=1.5	0.2	37	58	43	60	67	77
Familia B k=2	0.2	78	91	86	94	98	99
Familia B k=3	0.2	79	79	86	86	96	96
Familia B k=1.5	0.6	24	47	29	54	42	74
Familia B k=2	0.6	61	87	73	93	93	99
Familia B k=3	0.6	99	100	100	100	100	100
Familia B k=1.5	0.9	27	57	31	65	54	86
Familia B k=2	0.9	73	95	82	98	99	100
Familia B k=3	0.9	100	100	100	100	100	100

Tabla 3.4.4 Censura tipo II

		Tamaño de muestra					
		N=20		N=30		N=40	
Distribución	p	$2^{D_{n,N}}$	$2^{DSP_{n,N}}$	$2^{D_{n,N}}$	$2^{DSP_{n,N}}$	$2^{D_{n,N}}$	$2^{DSP_{n,N}}$
Familia B k=1.5	0.2	31	30	38	39	44	48
Familia B k=2	0.2	56	57	71	74	82	85
Familia B k=3	0.2	91	91	98	98	100	100
Familia B k=1.5	0.6	10	20	13	30	15	36
Familia B k=2	0.6	19	43	31	62	40	75
Familia B k=3	0.6	50	82	76	96	89	99
Familia B k=1.5	0.9	12	21	16	31	22	41
Familia B k=2	0.9	24	43	39	66	56	83
Familia B k=3	0.9	59	84	87	98	98	100
		Tamaño de muestra					
		N=50		N=60		N=100	
Distribución	p	$2^{D_{n,N}}$	$2^{DSP_{n,N}}$	$2^{D_{n,N}}$	$2^{DSP_{n,N}}$	$2^{D_{n,N}}$	$2^{DSP_{n,N}}$
Familia B k=1.5	0.2	51	55	56	62	74	79
Familia B k=2	0.2	89	92	93	95	99	100
Familia B k=3	0.2	100	100	100	100	100	100
Familia B k=1.5	0.6	18	44	22	51	35	71
Familia B k=2	0.6	52	85	64	92	88	99
Familia B k=3	0.6	96	100	99	100	100	100
Familia B k=1.5	0.9	26	48	29	56	66	80
Familia B k=2	0.9	70	92	79	96	99	100
Familia B k=3	0.9	100	100	100	100	100	100

De Tablas 3.4.1 y 3.4.2, se observa que cuando el valor de k y la razón de censura son pequeños, el test basado en el estadístico de

K-S es más potente que el basado en DSP , pero a medida que ambos aumentan, las potencias tienden a igualarse.

Para la censura de tipo II resulta que el test basado en el estadístico ${}_2^{DSP}_{n,N}$ es más potente que el basado en ${}_2^D_{n,N}$ cuando el tamaño de muestra es más pequeño y la razón de censura es también pequeña. A medida que la razón de censura aumenta, el test basado en ${}_2^D_{n,N}$ parece ligeramente más potente, en tanto que para tamaños de muestra mayores la potencia de ambos tests es similar.

Tablas 3.4.3 y 3.4.4 indican que, en el caso de la familia B, los tests basados en los estadísticos ${}_1^{DSP}_{T,N}$ y ${}_2^{DSP}_{n,N}$ resultan más potentes para ambos tipos de censura (I y II). Esto vale para todos los valores de p y tamaños de muestra analizados.

La forma de las distribuciones de estas familias con valores de $k > 1$ hace que, en el caso por ejemplo del gráfico DSP , los puntos graficados queden más alineados en la parte central para la familia B que en el caso de la familia A. Así, al censurar, se espera que se rechace más en una familia que en la otra, para los tests basados en los estadísticos DSP , por la forma de las bandas que se han definido.

3.5 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 3.5.1

En Tabla 3.5.1 se listan 40 datos generados con distribución perteneciente a la familia B con $k = 2$.

Tabla 3.5.1

0.1156027	0.1184103	0.1540003	0.2347934	0.2360982	0.2924396	0.3034254	0.3056857
0.3118995	0.3296081	0.3404021	0.3506400	0.3603013	0.3771419	0.3811734	0.4085101
0.4101450	0.4273006	0.4566492	0.4570207	0.4701292	0.4756591	0.5097628	0.5357696
0.5410887	0.5862693	0.6086388	0.6143692	0.6172477	0.6248635	0.6519500	0.6699048
0.6718627	0.6813901	0.6875538	0.7891598	0.7960477	0.8012493	0.8206599	0.9689826

Figuras 3.5 y 3.6 presentan los gráficos PP y DSP para la muestra completa dada en Tabla 3.5.1, con las bandas de aceptación

respectivas para un nivel de significación de los tests basados en D y en DSP del 10%.

Con esta muestra completa, para ejemplificar los tests y gráficos mencionados, primero se testea la hipótesis nula de que la distribución es $U(0,1)$.

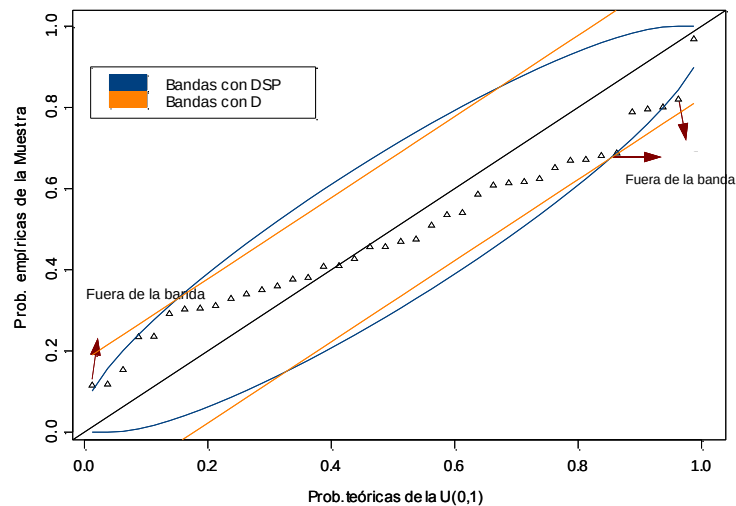


Figura 3.5. Gráfico *PP* de la muestra perteneciente a la familia B, indicando los puntos fuera de la banda.

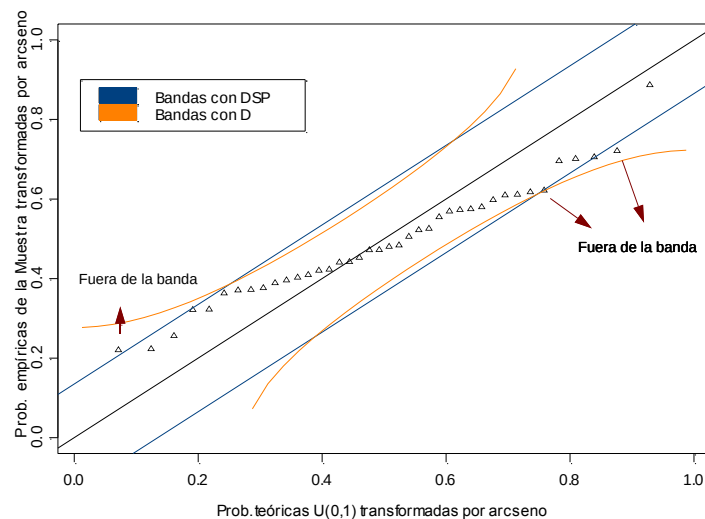


Figura 3.6. Gráfico *DSP* de la muestra perteneciente a la familia B, indicando los puntos fuera de la banda.

Se puede observar que en el caso de la muestra completa, se rechaza la hipótesis nula de que la familia proviene de una distribución $U(0,1)$, para el nivel de significación elegido y el test basado en el estadístico DSP pero no para el basado en el estadístico D . En el primer caso, hay 3 observaciones que se presentan fuera de la banda. También se puede observar que los puntos graficados no están alineados, indicando alejamiento de la distribución hipotética planteada, ya que para el gráfico PP en el eje de las abscisas se representan las probabilidades teóricas de la distribución uniforme y en las ordenadas las empíricas la distribución bajo H_0 y para el caso del gráfico DSP estas probabilidades transformados por la distribución arcseno.

En las aplicaciones prácticas obviamente no se tendría la muestra completa y no se podría realizar este test.

En Tabla 3.5.2 se resume la información obtenida, los valores calculados de los estadísticos y la decisión para el test cuya hipótesis nula es que la distribución de la cual proviene la muestra observada es $U(0,1)$.

Tabla 3.5.2

Valor D	Valor DSP
0.1874462	0.1543225
$0.1 < p\text{-valor} < 0.25$	$0.01 < p\text{-valor} < 0.05$

Esta muestra de tamaño 40 dada en Tabla 3.5.1, es censurada con un valor $T = 0.6$. Sólo se consideran las observaciones menores que este valor. Así, se obtienen las primeras 26 observaciones completas y se tiene entonces una muestra con censura de tipo I con $T = 0.6$.

Se realizan gráficos con las bandas de aceptación al 5%. Se puede observar en Figuras 3.7 y 3.8, que el primer punto es el que produce el rechazo, ya que es el único que se encuentra fuera de las bandas.

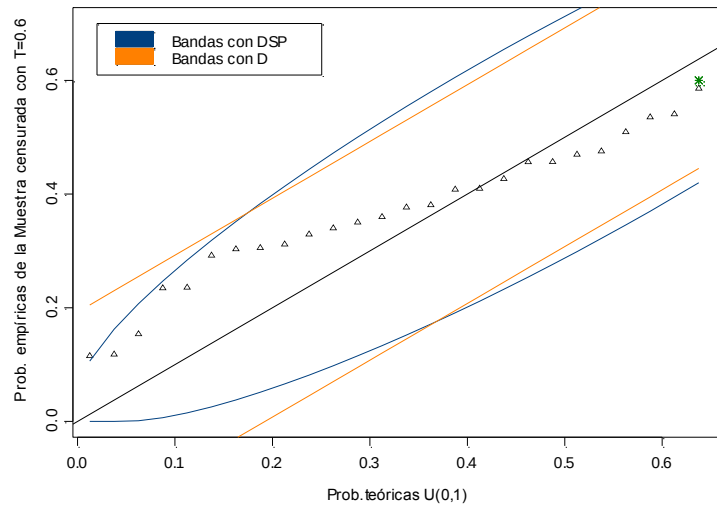


Figura 3.7. Gráfico *PP* de la muestra censurada de la muestra de tamaño 40 perteneciente a la familia B, con bandas de aceptación del 95%.

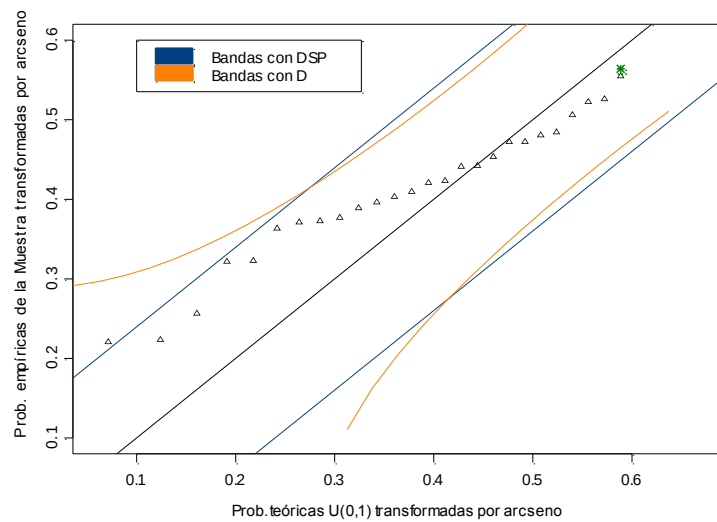


Figura 3.8. Gráfico *DSP* de la muestra censurada de la muestra de tamaño 40 perteneciente a la familia B, con bandas de aceptación del 95%.

Para la muestra censurada desde Tabla 3.5.1 se obtuvieron los estadísticos de los dos tests: ${}_1D_{0.6,40}$ de K-S y ${}_1DSP_{0.6,40}$ que se ha

propuesto. Se comparan los valores hallados con los percentiles de Tablas A7 y A8 que se incluyen en el Apéndice 1. Para un nivel de significación 5%, los valores de los percentiles son: $d_{0,95}=0.2049344$ y $dsp_{0,95}=0.1398254$. Los valores obtenidos se consignan en Tabla 3.5.3.

Tabla 3.5.3

Valor ${}_1D_{0,6,40}$	Valor ${}_1DSP_{0,6,40}$
0.1674396	0.1495315
$0.15 < p\text{-valor} < 0.25$	$0.05 < p\text{-valor} < 0.01$

Ya que se sabe como se ha generado la muestra, no proviene de la distribución uniforme, por lo que es correcto rechazar, como se hace con el estadístico ${}_1DSP_{T,N}$. Los diferentes resultados obtenidos con ambos tests eran esperables ya que, en el caso de la distribución elegida para generar la muestra, perteneciente a la familia B, se sabe que el test basado en ${}_1DSP_{T,N}$ resulta más potente que el basado en ${}_1D_{T,N}$.

Ejemplo 3.5.2

El siguiente ejemplo está tomado de Barr and Davidson (1973). Los datos corresponden a una muestra de tamaño 20 de elementos puestos a prueba hasta un tiempo de 2.2 horas. Los elementos que fallan no son reemplazados.

Los autores deseaban testear la hipótesis que la distribución de los tiempos de vida es exponencial con parámetro 0.1 o que el tiempo medio hasta la falla es de 10 horas. Se obtuvieron 7 tiempos de falla, que se presentan en Tabla 3.5.4.

Tabla 3.5.4

Item	1	2	3	4	5	6	7
Tiempos	0.1	0.2	0.3	0.4	0.7	1.0	1.4
$u_{(i)} = F_o(x_{(i)})$	0.00995	0.01980	0.03921	0.02955	0.06761	0.09516	0.13064

Los tiempos observados están en la segunda fila de Tabla 3.5.4 y en la tercera fila están los tiempos transformados mediante la FDA de una distribución exponencial de parámetro 0.1, es decir:

$$F_0(x) = 1 - e^{-0.1x}.$$

El tiempo de censura de 2.2 horas se transforma en

$$F_0(2.2) = 1 - e^{-0.22} \approx 0.2.$$

La muestra transformada presenta entonces censura de tipo I, con $T=0.2$. Mediante el programa desarrollado en el software S-plus (Programa 3.1) para el cálculo de los estadísticos ${}_1D_{T,N}$ y ${}_1DSP_{T,N}$ se obtuvo la información que se consigna en Tabla 3.5.5.

Tabla 3.5.5

Valor ${}_1D_{0.2,20}$	Valor ${}_1DSP_{0.2,20}$
0.2193600	0.1517833
$0.08 < \text{p-valor} < 0.1$	$0.1 < \text{p-valor} < 0.13$

Los resultados obtenidos son consistentes con los consignados por Michael y Schucany (1986) quienes realizaron el test basado en el estadístico de K-S para muestras censuradas de tipo I. Los autores utilizaron las tablas de Dufour and Maag (1978) y las de Barr and Davidson (1973) obteniendo un p-valor de 0.1, usando interpolación lineal. De acuerdo con los resultados brindados por los mencionados autores, quienes analizaron también este ejemplo con tests basados en los estadísticos de tipo cuadrático para muestras censuradas de tipo I, los estadísticos observados ${}_1W_{0.2,20}^2$ y ${}_1A_{0.2,20}^2$ dan p-valores aproximados 0.008 y 0.005. En este caso, la decisión es rechazar la hipótesis nula de que la muestra censurada proviene de una exponencial con parámetro 0.1.

Ejemplo 3.5.3

Para ilustrar las técnicas de estimación de parámetros en una muestra con censura simple a la derecha de una población lognormal, Cohen (1991) da un ejemplo de una muestra de tamaño 20 de una

población con distribución lognormal de parámetros $\gamma = 100$, $\mu = \ln(50)$ y $\sigma = 0.4$. FDA de una distribución lognormal de parámetros γ , μ y σ , se puede expresar como (Cohen, 1991, pág. 97):

$$F_o(x, \gamma, \mu, \sigma^2) = \Phi \left[\frac{\ln(x - \gamma) - \mu}{\sigma} \right], \text{ donde } \Phi(x) \text{ representa la FDA } N(0,1).$$

Tabla 3.5.6

127.211	128.709	131.375	132.971
133.143	135.880	137.338	144.328
145.788	148.290	153.070	155.369
155.680	157.238	164.304	166.475
168.554	174.800	184.101	201.415

Tabla 3.5.6 contiene los datos de la muestra completa. Cohen (1991) considera una muestra censurada de tipo II con las 18 observaciones más pequeñas de la muestra y, a partir de ella, estima los tres parámetros. En este caso la razón de censura es 0.9.

Primero, se realiza el test de bondad de ajuste con la muestra completa para determinar si proviene de una población con distribución lognormal con los parámetros establecidos. También se efectúan los gráficos *DSP* y *PP* correspondientes, dados en Figuras 3.9 y 3.10, respectivamente.

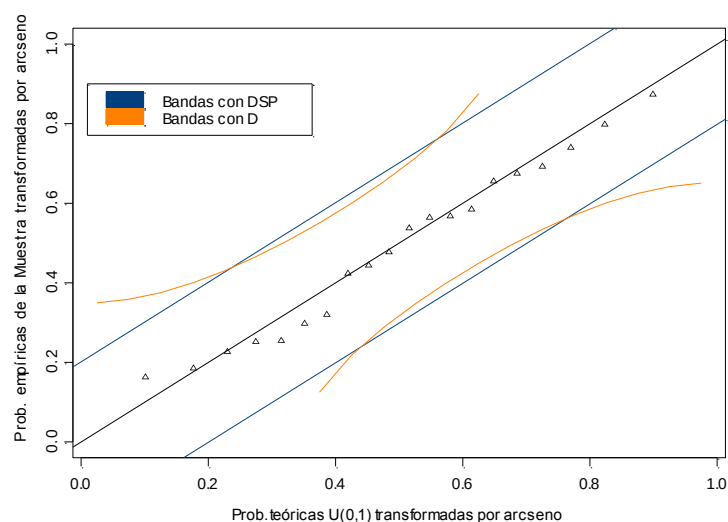


Figura 3.9. Gráfico *DSP* de Ejemplo 3.5.3 con bandas de aceptación del 95%.

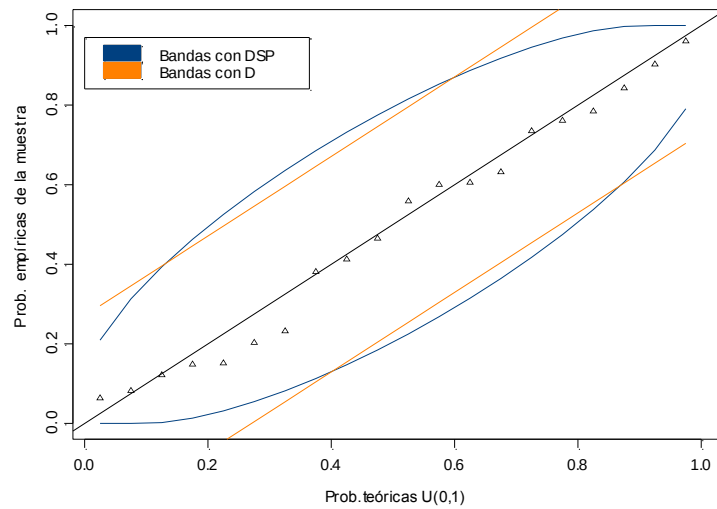


Figura 3.10. Gráfico *PP* de Ejemplo 3.5.3 con bandas de aceptación del 95%.

En los gráficos presentados en Figuras 3.9 y 3.10, se puede observar que los puntos están razonablemente alineados y no se observa ninguno fuera de las bandas, indicando que no se rechaza H_0 . Los estadísticos observados para los tests se consiguen en Tabla 3.5.7.

Tabla 3.5.7

Valor D	Valor DSP
0.1173137	0.06572963
p-valor > 0.5	p-valor > 0.5

Se considera la muestra censurada de tipo II que corresponde a las 18 primeras observaciones de la muestra ordenada.

Con esta muestra censurada se efectúan los tests correspondientes de bondad de ajuste donde la hipótesis nula es:

$$H_0: F(x) \equiv F_0(x),$$

Donde $F(x)$ es la distribución de la cual proviene la muestra y $F_0(x)$ es la distribución lognormal con parámetros $\gamma = 100$, $\mu = \ln(50)$ y $\sigma = 0.4$.

Realizando los cálculos correspondientes se obtiene la información dada en Tabla 3.5.8, teniendo en cuenta que la razón de censura de 0.9. Se obtuvieron los mismos valores de los estadísticos que para la muestra sin censura. Esto se debe a que las distancias máximas se realizan en alguna de las primeras 18 observaciones de la muestra.

Tabla 3.5.8

Valor ${}_2D_{18,20}$	Valor ${}_2DSP_{18,20}$
0.1173137	0.06572963
p-valor > 0.5	p-valor > 0.5

Con ambos tests, se concluye que no se rechaza la hipótesis de que la muestra censurada proviene de una población cuya distribución es log-normal con los parámetros indicados por Cohen (1991). En Figuras 3.11 y 3.12 se presentan los gráficos *PP* y *DSP* para muestra censurada obtenida desde la Tabla 3.5.6

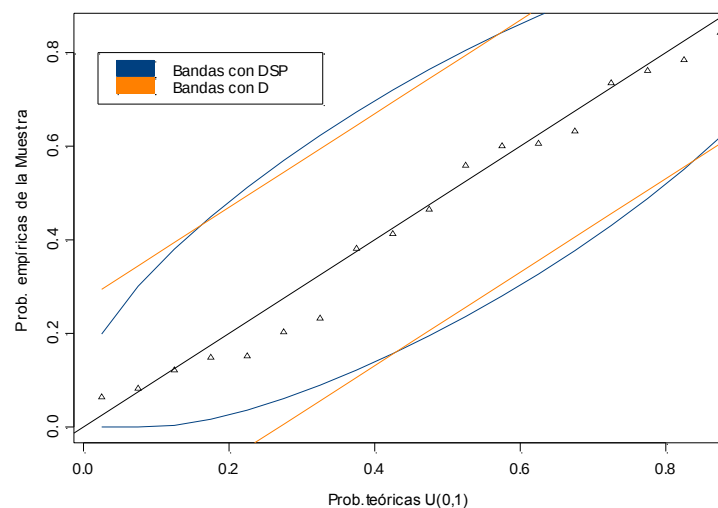


Figura 3.11. Gráfico *PP* para la muestra censurada obtenida desde Tabla 3.5.6, con bandas de aceptación del 95%.

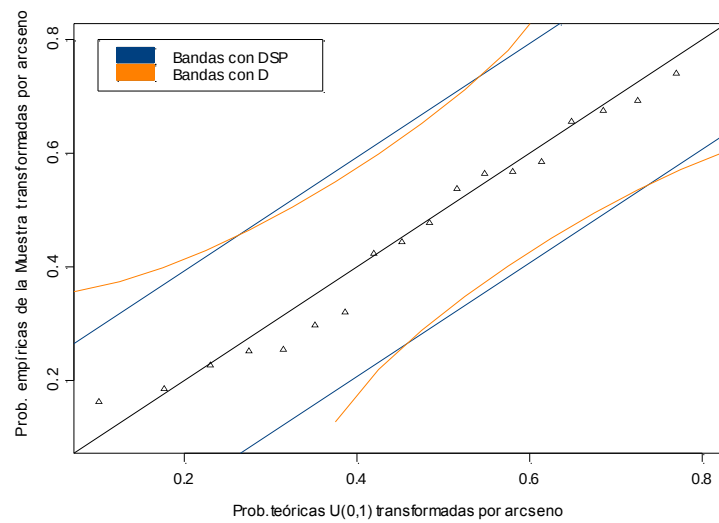


Figura 3.12. Gráfico *DSP* para la muestra censurada obtenida desde Tabla 3.5.6, con bandas de aceptación del 95%.

Desde Figuras 3.11 y 3.12 se comprueba que todos los puntos están dentro de las bandas de aceptación trazadas del 95%.

Capítulo 4

Tests para la familia normal con parámetros desconocidos.

4.1 Introducción

Como se ha visto, la teoría de los estadísticos de bondad de ajuste basados en la FDE se encuentra estudiada en el caso de una distribución completamente especificada inclusive para muestras pequeñas.

Cuando los parámetros de locación y escala μ y σ son desconocidos, éstos deben ser reemplazados por sus estimadores. Así las fórmulas dadas en las Secciones 2.3 y 2.5 aún se pueden utilizar para calcular los estadísticos con $U_{(i)} = F(X_{(i)}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$.

Sin embargo, aun cuando la hipótesis nula sea cierta, los $U_i = F(X_i, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ no resultan una muestra de la distribución uniforme y las distribuciones de los estadísticos de bondad de ajuste que se obtienen reemplazando los parámetros por sus estimadores serán diferentes a las ya estudiadas, ya que dependerán de la distribución a testear, de los parámetros estimados, del método de estimación y del tamaño de la muestra. Si los parámetros son estimados adecuadamente las distribuciones de los estadísticos no dependerán de los valores verdaderos de los parámetros. Generalmente se utilizan los estimadores de máxima verosimilitud.

Se han desarrollado tests basados en la FDE, obtenidos reemplazando los parámetros desconocidos por estimaciones para algunas distribuciones como por ejemplo, la normal, la exponencial, la Gumbel y la logística. Dichos tests dependen de la distribución a testear y del tamaño de la muestra. Se han calculado los cuantiles de las distribuciones de los estadísticos correspondientes mediante simulación, ya que las distribuciones exactas son muy complicadas de obtener (D'Agostino et al, 1986).

Se considerará el caso particular de la distribución normal. Si se supone que bajo H_0 la distribución es lognormal, entonces transformando los datos mediante la función logaritmo, se pueden utilizar los tests desarrollados para la distribución normal.

En este caso, la hipótesis nula es:

Ho: la muestra aleatoria $X_1, X_2, \dots, X_N$ proviene de la familia $N(\mu, \sigma^2)$, donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos.

Se trata de una hipótesis nula compuesta ya que en ella sólo se establece que la muestra proviene de la familia normal, sin establecer cuáles son sus parámetros. Michael (1983) propone estimar los parámetros μ y σ^2 utilizando los estimadores de máxima verosimilitud, o sea:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} .$$

(4.1)

Lilliefors (1967) y Stephens (1974) proponen reemplazar el estimador de la varianza por uno insesgado, tal como:

$$\hat{\sigma}^{*2} = S^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1} , \quad (4.2)$$

ya que si el tamaño de muestra es grande no habrá prácticamente diferencia entre ambas estimaciones de la varianza. Se utilizará en general las estimaciones brindadas por las fórmulas (4.1) siguiendo lo sugerido por Michael (1983).

S-plus utiliza los estimadores insesgados para el test de K-S cuando no se especifican los parámetros.

4.2 Tests basados en los estadísticos D y DSP

Los pasos para realizar tests basados en los estadísticos D y DSP , son los siguientes:

1. Calcular las estimaciones $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ según (4.1).
2. Hallar $Y_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, para $i=1, 2, \dots, N$, siendo $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ la muestra ordenada.

3. Calcular $U_{(i)} = \Phi(Y_{(i)})$, para $i=1,2,\dots,N$, donde Φ denota la FDA $N(0,1)$.

4. Utilizando $Y_{(i)}$ y $U_{(i)}$, obtener los estadísticos

$$D = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(i-0.5)}{N} - u_{(i)} \right| + \frac{0.5}{N}, \quad (4.3)$$

$$\text{y } DSP = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \arcsen\left(\frac{i-0.5}{N}\right)^{0.5} - \arcsen(u_{(i)}^{0.5}) \right| \right\}. \quad (4.4)$$

5. Comparar los valores de los estadísticos con los valores críticos que se deducen de Tablas A7 y A8 de Apéndice 1. Se rechaza H_0 para un nivel de significación α , si el valor observado del estadístico supera el cuantil $1-\alpha$ consignado en la tabla correspondiente.

El test que utiliza el estadístico D se conoce como test modificado de K-S y también como test de Lillierfors (1967), ya que fue el primero en proponerlo. Para ambos tests, se calculan valores estandarizados de la variable, de modo tal que la distribución nula de los estadísticos no depende de los parámetros desconocidos. Solamente dependen de la distribución a testear, que se ha supuesto normal, y del tamaño de la muestra.

Las distribuciones exactas de los estadísticos D (Conover, 1999, pág.444) y DSP bajo la hipótesis nula son desconocidas.

Se estimaron los cuantiles de estas distribuciones por simulación utilizando 10000 replicaciones con muestras de tamaño N , para valores de N de 10 a 100 con paso 2.

En Apéndice 1 se incluyen las tablas de cuantiles para ambos estadísticos. La A7 corresponde a la distribución bajo H_0 del estadístico D y la A8 la análoga para DSP .

En el caso del estadístico D , Conover (1999) y Stephens (1974, 1986) presentan tablas de cuantiles y Michael (1983) proporciona tablas de percentiles para el estadístico DSP para algunos valores de N .

4.3 Bandas de aceptación derivadas de los tests presentados en Sección 4.2

Los gráficos de Capítulo 1 y las regiones de aceptación que se han visto en la Sección 2.7, se pueden realizar también para los tests basados en los estadísticos D y DSP de Sección 4.2, sólo que se deben reemplazar los parámetros que ahora son desconocidos por los estimadores de máxima verosimilitud y los percentiles por los correspondientes hallados en Tablas A7 y A8 del Apéndice 1 para D y para DSP respectivamente.

En Apéndice 2 se incluyen los Programas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3 que, dadas muestras de tamaño 10, 20, 30, 40 o 100, permiten obtener los gráficos QQ , PP y DSP , descritos en Capítulo 1, para el caso que se está analizando en esta sección.

La salida de estos programas incluye gráficos que permiten visualizar las bandas de aceptación, los valores de los estadísticos y la decisión resultante de la comparación con los cuantiles para un nivel 0.05 (1 indica rechazo de H_0 y 0 que no se rechaza H_0). Estos programas emplean las estimaciones dadas en (4.1).

En el caso de las bandas trazadas en el gráfico QQ , éstas dependen de las estimaciones dadas para la media y el desvío, del tamaño de muestra y el nivel de significación. En cambio, las bandas trazadas para los otros estadísticos sólo dependen del nivel de significación y del tamaño de muestra.

4.4 Ejemplos de aplicación

El programa 4.2 que calcula, dada una muestra, los estadísticos para el test de normalidad con parámetros desconocidos, empleando las estimaciones dadas en (4.1).

Se darán dos ejemplos de aplicación de estos tests, incluyendo sus gráficos.

Ejemplo 4.4.1

Se generó al azar una muestra de tamaño 30 de una distribución t con 4 grados de libertad. Esta muestra se encuentra en Apéndice 2 y se

denomina Muestra T4. En Tabla 4.3.1 se presentan los resultados obtenidos con el programa 4.2.

Tabla 4.3.1

Valor D	Valor DSP
0.13133787	0.12018117
$0.1 < p\text{-valor} < 0.25$	$0.01 < p\text{-valor} < 0.05$

Nótese que utilizando el estadístico D la conclusión es no rechazar, en cambio con el estadístico DSP se concluye correctamente: se rechaza la hipótesis nula de que la muestra dada pertenece a la familia normal.

A continuación, se presentan los gráficos DSP , PP y QQ para los datos de la muestra analizada en este ejemplo. Puede observarse como el primer punto de la muestra ordenada se halla fuera de la banda de aceptación que corresponde al estadístico DSP y en cambio todos los puntos se encuentran dentro de las bandas de aceptación que se trazan con el estadístico D .

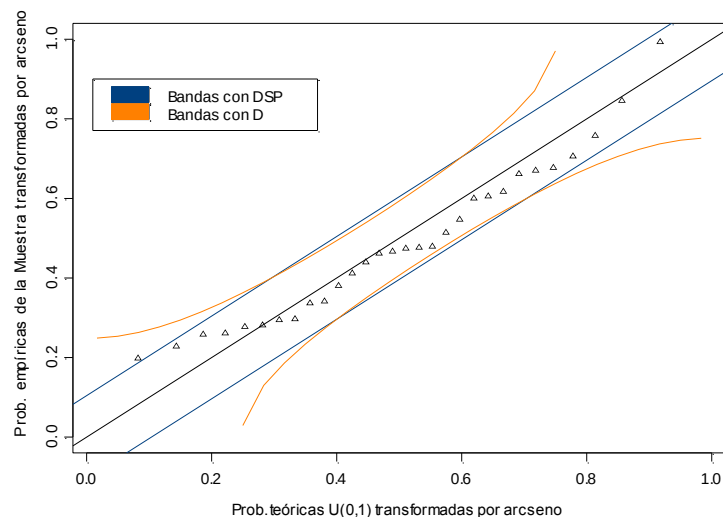


Figura 4.1. Gráfico DSP de Muestra T4 con bandas de aceptación del 95%.

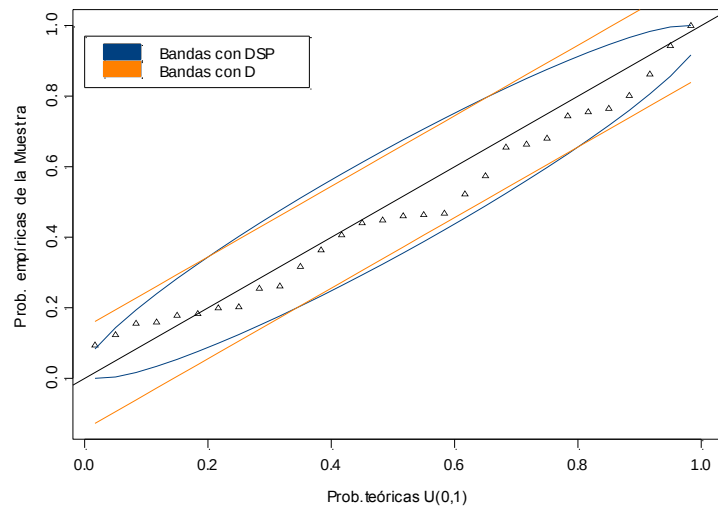


Figura 4.2. Gráfico *PP* de Muestra T4 con bandas de aceptación del 95%.

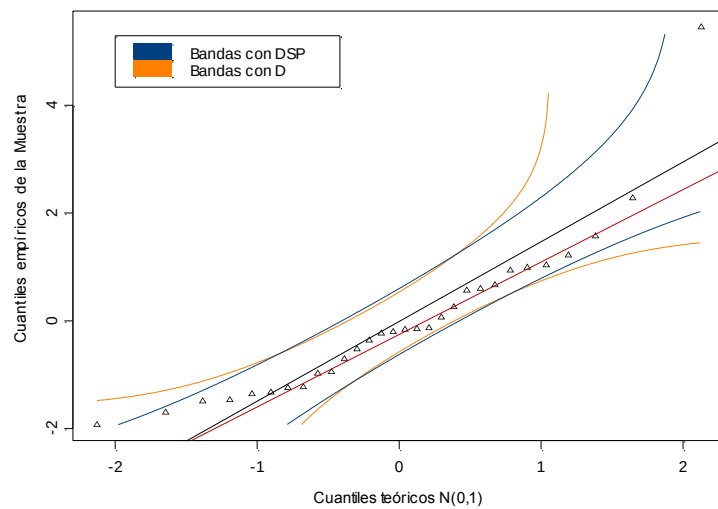


Figura 4.3. Gráfico *QQ* de Muestra T4 con bandas de aceptación del 95%.

Dado que el análisis previo se basa en una única muestra, interesa saber si la diferencia observada en el comportamiento de los estadísticos se mantiene en general. Para ello, se realiza el estudio de simulación que se describe en la sección 4.5.

Ejemplo 4.4.2

Stephens (1986, página 98) presenta una tabla que contiene los pesos en gramos de 20 pollitos de una raza determinada, ejemplo que emplea varias veces a lo largo del libro. Los datos se encuentran en el Apéndice 2 con el nombre: Pesos de pollos.

Se aplican los test propuestos para la hipótesis de normalidad de la distribución de los pesos, con media y varianza desconocida. La conclusión es no rechazar la hipótesis nula planteada. Se resume la información obtenida en Tabla 4.3.2 comparándola con los resultados obtenidos por Stephens (1986) que también se incluye en Tabla 4.3.2.

Tabla 4.3.2

Valor D	Valor DSP	Stephens
0.10372236	0.05314947	0.104
p-valor>0.5	p-valor>0.5	No rechazo al 15%

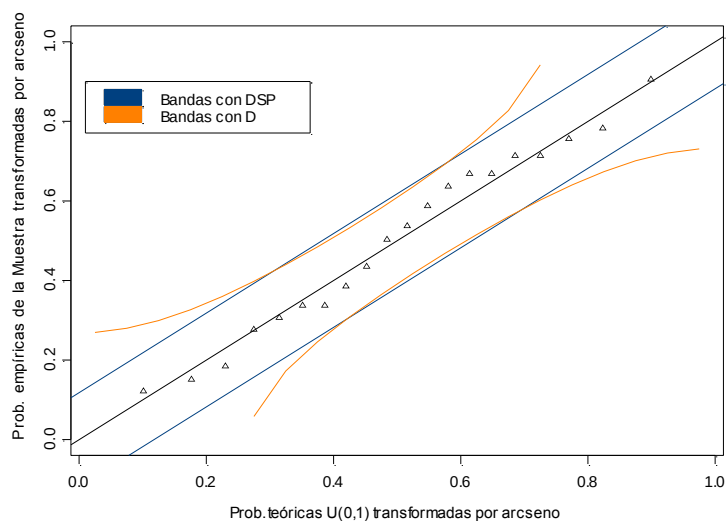


Figura 4.5. Gráfico DSP correspondiente a pesos de pollos con bandas de aceptación para un nivel de significación del test $\alpha=0.05$.

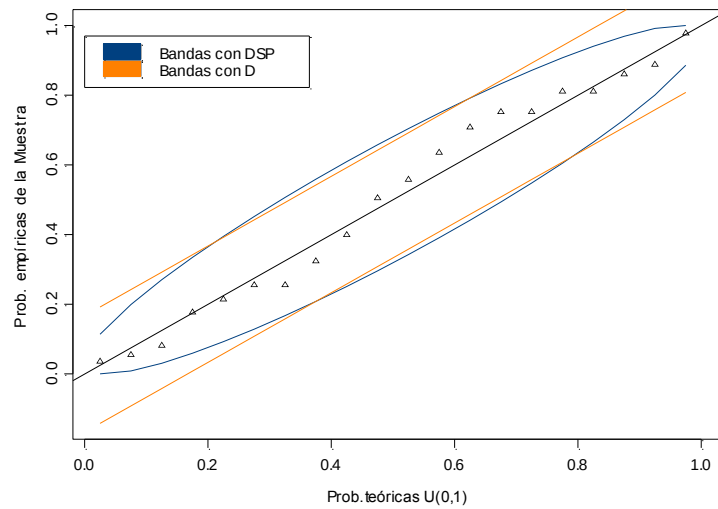


Figura 4.6. Gráfico *PP* correspondiente a pesos de pollos con bandas de aceptación para un nivel de significación del test $\alpha=0.05$.

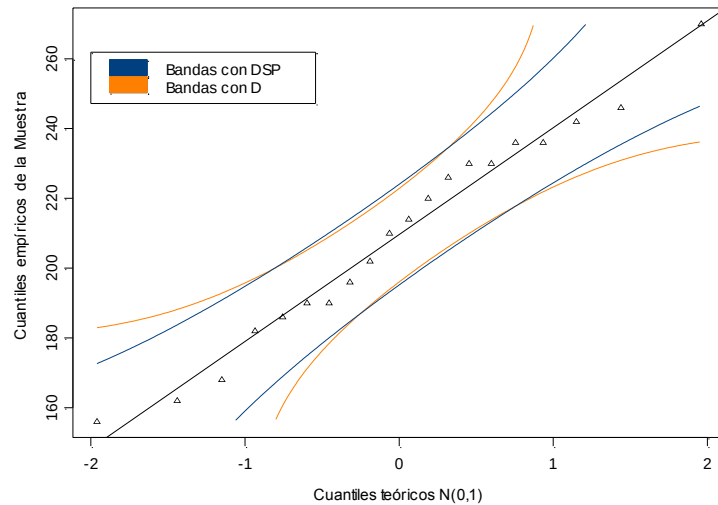


Figura 4.7. Gráfico *QQ* correspondiente a pesos de pollos con bandas de aceptación para un nivel de significación del test de $\alpha=0.05$.

En Figuras 4.5-4.7, se observa que los puntos graficados se encuentran dentro de las bandas de aceptación. En base a estas Figuras, la conclusión es, obviamente, no rechazar la hipótesis nula para el nivel de significación del 5%.

4.5 Potencia de los test planteados en Sección 4.2

Para el estudio de la potencia de los tests, se ha replicado la tabla que presenta Michael (1986) y se la ha extendido a otros tamaños muestrales. Para ello, se generaron al azar muestras con distintas distribuciones y, para un nivel de significación $\alpha=0.05$, se calculó la cantidad de veces que se rechaza la hipótesis nula de que la muestra proviene de la familia normal (Programa 4.4). Se generaron 1000 muestras al azar de cada distribución, ya que éste es el número que empleó Michael en su paper.

En Tablas 4.4.1 y 4.4.2 se presentan los valores de potencia estimada en porcentaje para los tests estudiados en Sección 4.2 y para un nivel de significación $\alpha=0.05$. El último renglón indica el nivel, ya que se obtuvo generando distribuciones normales.

Tabla 4.4.1

EMV		Tamaño de muestra					
		N=10		N=20		N=30	
Distribución	parámetros	D	DSP	D	DSP	D	DSP
Chi cuadrado	1	56	64	87	99	98	100
Chi cuadrado	3	20	20	43	62	61	86
Chi cuadrado	4	19	17	33	46	48	73
Chi cuadrado	10	9	8	17	19	22	29
uniforme	(0,1)	9	8	11	14	17	24
Log-normal	(0,1)	48	50	79	93	93	99
exponencial	1	33	35	56	80	80	98
T de Student	1	58	58	83	86	93	94
T de Student	3	16	16	24	29	34	39
T de Student	4	11	10	17	21	22	29
T de Student	6	8	8	10	12	12	16
Laplace	(0,1)	14	14	21	22	29	31
Normal	(0,1)	6	5	5	5	5	5

Tabla 4.4.2

EMV		Tamaño de muestra					
		N=50		N=70		N=90	
Distribución	parámetros	D	DSP	D	DSP	D	DSP
Chi cuadrado	1	100	100	100	100	100	100
Chi cuadrado	3	84	99	95	100	98	100
Chi cuadrado	4	70	96	83	100	93	100
Chi cuadrado	10	35	51	44	69	54	81
uniforme	(0,1)	30	60	43	88	57	98
Log-normal	(0,1)	100	100	100	100	100	100
exponencial	1	96	100	100	100	100	100
T de Student	1	100	100	100	100	100	100
T de Student	3	48	50	58	62	67	67
T de Student	4	30	33	40	42	43	46
T de Student	6	16	18	18	20	21	22
Laplace	(0,1)	43	41	55	51	61	51
Normal	(0,1)	5	4	5	5	5	5

La Tabla 4.4.1 corresponde a la tabla presentada por Michael (1986). Se observa que se alcanza el nivel nominal y que el estadístico DSP es más potente en general que el D para detectar las alternativas consideradas, salvo en el caso de la distribución de Laplace para tamaños de muestra mayores que 50.

Por otro lado, si se compara la potencia obtenida para DSP con la que obtiene Stephens (1974) para los estadísticos A^2 de Anderson-Darling y W de Shapiro-Wilk (1965), estos estadísticos resultan más potentes para detectar alternativas que el estadístico W^2 de Cramer-von Mises y DSP , pero las diferencias no son muy grandes. Sin embargo, DSP tiene la ventaja que las regiones de aceptación pueden ser representadas gráficamente como ya se ha visto en las secciones anteriores, mientras que no es posible representar las regiones de aceptación para los estadísticos de tipo cuadrático.

Los tests planteados son poco sensibles para detectar la distribución uniforme para los tamaños de muestra menores que 50. Los tests presentados en Sección 4.2 resultan potentes para las hipótesis alternativas lognormal, chi-cuadrado con 1 grado de libertad y t con 1 grado de libertad, aun con tamaños de muestra pequeños. Se trata de distribuciones con una cola pesada (caso de la lognormal y chi-cuadrado) o con dos colas pesadas (caso de la t con 1 grado de libertad), respectivamente.

Capítulo 5

Tests de bondad de ajuste a una distribución normal con parámetros desconocidos en el caso de muestras censuradas.

5.1 Introducción

En este capítulo se proponen tests de bondad de ajuste a una distribución normal con parámetros desconocidos, en el caso de muestras con censura. Para desarrollar estos tests, es necesario estimar los parámetros de la distribución normal. La primera dificultad que surge es precisamente que la muestra no está completa. Por lo tanto, se comienza estudiando cómo se estiman los parámetros de una distribución normal cuando la muestra presenta censura por derecha(o izquierda) de tipo I o de tipo II.

5.2 Estimadores de Máxima Verosimilitud (EMV) para los parámetros de una distribución normal a partir de una muestra censurada

Como en el caso de una distribución completamente especificada, se considera censura simple de tipo I y de tipo II.

5.2.1 Caso de censura simple a derecha (de tipo I y de tipo II)

Primero se encuentran los estimadores siguiendo las ideas de Cohen (1991, página 19).

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ consistente en n observaciones completas de una muestra de tamaño N .

En este caso la función de verosimilitud tiene la forma (Klein y Moeschberger, 1997) siguiente:

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = \kappa (1 - F(T))^c \prod_{i=1}^n f(x_i) \quad (5.1)$$

donde $x_i \leq T$, $1 \leq i \leq n$.

n : número de observaciones completas.

$c = N - n$: número de observaciones censuradas.

κ : constante que no depende de los parámetros.

$F(x)$: FDA de la variable aleatoria X .

$f(x)$: fdp de X .

En el caso de censura de tipo I, T es fijado previamente y en el de censura de tipo II, $T = X_{(n)}$.

Si $F(x)$ es la FDA de una normal con media μ y desvío σ y $f(x)$ es la correspondiente fdp, llamando $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ a la variable normal estándar, resulta:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Entonces, llamando $\xi = \frac{T - \mu}{\sigma}$ al punto estandarizado de censura que depende de los parámetros a estimar, se obtiene:

$$\ln(L) = \ln \kappa + c \ln(1 - \Phi(\xi)) - n \ln \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2.$$

Derivando respecto de los parámetros, igualando a cero y simplificando, se llega a las ecuaciones de verosimilitud dadas por (5.2) y (5.3).

$$\frac{c\varphi(\xi)}{(1 - \Phi(\xi))} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma} = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{y} \quad \frac{c\varphi(\xi)\xi}{(1 - \Phi(\xi))} - n + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} = 0. \quad (5.3)$$

Estas ecuaciones son implícitas y para resolverlas se deben que utilizar métodos numéricos, por ejemplo el método de Newton-Raphson para resolver un sistema de dos ecuaciones no lineales puede ser considerado. Sin embargo, no es fácil establecer si se cumplen las condiciones que aseguran la convergencia a una única solución para cada parámetro. Por esta razón, puede buscarse una forma alternativa para resolver el sistema formado por (5.2) y (5.3) en forma más

sencilla, por ejemplo llevando el sistema de dos ecuaciones a una sola.

Así, como $h = \frac{c}{N}$ es la proporción de observaciones censuradas y por lo tanto $\frac{h}{1-h} = \frac{\frac{c}{N}}{1-\frac{c}{N}} = \frac{c}{N-c} = \frac{c}{n}$, sea entonces,

$$Y(h, \xi) = \left(\frac{h}{1-h} \right) \frac{\varphi(\xi)}{(1-\Phi(\xi))}. \quad (5.4)$$

La función dada en (5.4) está bien definida para todo $h \neq 1$, se anula cuando no existen observaciones censuradas y es siempre no negativa. El caso $h=1$ no es de interés, ya que significa que toda la muestra está censurada.

Dividiendo la expresión (5.2) por n y según (5.4), se obtiene:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = -\frac{c}{n} \frac{\varphi(\xi)}{(1-\Phi(\xi))} = -Y(h, \xi)$$

o equivalentemente,

$$\bar{X} - \mu = -\sigma Y(h, \xi). \quad (5.5)$$

Sea $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$ el EMV de σ^2 basado en una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ de tamaño n . Además,

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2}{n} = S^2 + (\bar{X} - \mu)^2. \quad (5.6)$$

y reemplazando (5.6) en (5.3)

$$S^2 + (\bar{X} - \mu)^2 = \sigma^2(1 - Y(h, \xi)\xi). \quad (5.7)$$

Según (5.5), resulta

$$S^2 = \sigma^2(1 - Y(h, \xi)\xi - Y(h, \xi)^2) = \sigma^2(1 - Y(h, \xi)(Y(h, \xi) + \xi)). \quad (5.8)$$

También en la expresión (5.5), usando $\xi = \frac{T - \mu}{\sigma}$ y por lo tanto

$\mu = T - \xi\sigma$, se obtiene,

$$\bar{x} - T = -\sigma Y(h, \xi) - \sigma\xi = -\sigma(\xi + Y(h, \xi)). \quad (5.9)$$

A partir de (5.5) y (5.8) se obtiene,

$$\frac{S^2}{(\bar{X}-T)^2} = \frac{1-Y(h,\xi)(Y(h,\xi)+\xi)}{(Y(h,\xi)+\xi)^2} = \alpha(h,\xi) \quad . \quad (5.10)$$

$$y \quad \sigma = \frac{-(\bar{X}-T)}{\xi+Y(h,\xi)} = \frac{T-\bar{X}}{Y(h,\xi)+\xi} \quad . \quad (5.11)$$

Como se está trabajando con censura a la derecha, el numerador de (5.11) es siempre positivo. El denominador debe ser positivo para que el término de la derecha represente un desvío estándar.

Se estudiará con más detalle el denominador de la expresión (5.11). Los EMVs $\hat{\sigma}$ y $\hat{\xi}$ deben satisfacer las ecuaciones (5.5) y (5.6) o (5.10) y (5.11).

En (5.10) se definió la función $\alpha(h,\xi) = \frac{s^2}{(\bar{x}-T)^2}$. Según (5.9) hay que encontrar ξ tal que:

$$\alpha(h,\xi) = \frac{1-Y(h,\xi)(Y(h,\xi)+\xi)}{(Y(h,\xi)+\xi)^2} \quad . \quad (5.12)$$

Se trata de una ecuación no lineal en ξ que puede resolverse por métodos numéricos para obtener $\hat{\xi}$.

Así, se ha llevado el problema original de resolver un sistema de dos ecuaciones no lineales a resolver una única ecuación no lineal. Se obtendrán a continuación las estimaciones de los parámetros μ y σ . Desde (5.7) se deduce que

$$\sigma^2 = S^2 + \sigma^2 Y(h,\xi)(Y(h,\xi)+\xi) \quad .$$

Además utilizando (5.8), se obtiene

$$\sigma^2 = s^2 + \frac{(T-\bar{x})^2}{(Y(h,\xi)+\xi)^2} Y(h,\xi)(Y(h,\xi)+\xi) = s^2 + \frac{(T-\bar{x})^2}{|Y(h,\xi)+\xi|} Y(h,\xi) \quad . \quad (5.13)$$

El miembro derecho de (5.13) es positivo y está bien definido, salvo que el denominador se anule. Se verá más adelante cuándo podría ocurrir esto. A partir de (5.5) resulta

$$\mu = \bar{X} + \sigma Y(h,\xi) = \bar{X} + \frac{T-\bar{X}}{|Y(h,\xi)+\xi|} Y(h,\xi) \quad . \quad (5.14)$$

Se define ahora la función no negativa,

$$\lambda(h, \xi) = \frac{Y(h, \xi)}{|Y(h, \xi) + \xi|},$$

bien definida salvo que el denominador se anule.

Las ecuaciones (5.12) y (5.13) pueden expresarse en la forma:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= S^2 + \lambda(h, \hat{\xi})(T - \bar{X})^2, \\ \hat{\mu} &= \bar{X} + \lambda(h, \hat{\xi})(T - \bar{X}).\end{aligned}\tag{5.15}$$

Para muestras completas $h=0$. Por lo tanto, $Y(h, \xi)=0$ y entonces $\lambda(h, \xi)=0$. Así, se obtienen los estimadores conocidos de máxima verosimilitud de los parámetros.

Si en cambio hay censura, se debe obtener $\hat{\xi}$, hallar $\lambda(h, \hat{\xi})$ y a partir de las ecuaciones (5.15) se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ buscados.

Cohen (1991) provee tablas de doble entrada que permiten, para una muestra dada, una estimación de la función $\lambda(h, \xi)$ a partir de los

valores de h y $\alpha(h, \xi) = \frac{S^2}{(\bar{X} - T)^2}$. Luego, se pueden calcular, según las ecuaciones (5.15), los estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$.

Para una muestra dada, si los valores de h o de $\alpha(h, \xi) = \frac{S^2}{(\bar{X} - T)^2}$ no están en la tabla, el autor sugiere utilizar interpolación lineal.

Los valores de h van desde 0.01 hasta 0.9 y los de $\alpha(h, \xi)$ desde 0.00 hasta 10.00. Para valores mayores que 1.00, la tabla va en intervalos de a 0.5 y luego de 4 aumenta cada un entero.

Dichas tablas no permiten obtener una estimación de ξ . En la presente tesis se encontrará una forma de estimarla.

5.2.2 Estimación de la solución de Ecuación (5.12)

Para hallar la estimación $\hat{\xi}$, primero se estudia qué sucede con el denominador de la expresión (5.11) y también el del segundo término

en la ecuación (5.10). La función $Y(h, \xi) = \left(\frac{h}{1-h}\right) \frac{\varphi(\xi)}{(1-\Phi(\xi))}$ resulta

numéricamente no calculable cuando ξ toma valores muy grandes en valor absoluto ya que, por ejemplo, S-plus asigna el valor 1 a $\Phi(\xi)$, cuando $|\xi| \geq 9$ y Excel, en cambio, lo hace cuando $|\xi| \geq 6$.

Para el problema que se está estudiando, esta función será evaluada para $|\xi| \leq 6$. Así es como se la trabajará en los programas que requieran su cálculo.

Retomando el problema en que se anula el denominador en las expresiones (5.12) y (5.13), se tiene que:

$$Y(h, \xi) + \xi = \frac{h}{1-h} \frac{\varphi(\xi)}{1-\Phi(\xi)} + \xi = K \left(\frac{\varphi(\xi)}{1-\Phi(\xi)} \right) + \xi = 0, \quad (5.16)$$

o equivalentemente,

$$K\varphi(\xi) = -\xi + \xi\Phi(\xi), \text{ o sea, } g(K, \xi) = K\varphi(\xi) + \xi - \xi\Phi(\xi) = 0. \quad (5.17)$$

Se observa que en la primera ecuación si ξ existe, resultará menor que cero ya que la función $Y(h, \xi)$ es positiva. Sin embargo, esta función no es continua en toda la recta y para evaluarla numéricamente resultará inestable cuando la FDA $N(0,1)$ está próxima a 1. Por esta razón, se obtuvo la función $g(K, \xi)$ que es más sencilla de calcular. Luego, se hallan posibles ceros de la función $g(K, \xi)$, tal que $|\xi| \leq 6$. La ecuación (5.17) es no lineal en ξ , de modo que será resuelta numéricamente utilizando el método de bisección para cada valor de K dado.

No se puede escribir $g(K, \xi)$ en términos de funciones "elementales" como polinomios, seno, coseno, etc., ya que está involucrada la FDA $N(0,1)$, la cual puede ser obtenida fácilmente desde varios softwares. Se puede observar que $g(K, \xi)$ es una función continua y derivable, cuya derivada primera es la siguiente:

$$g'(K, \xi) = K\varphi'(\xi) + 1 - \Phi(\xi) - \xi\varphi(\xi) = -K\xi\varphi(\xi) + 1 - \Phi(\xi) - \xi\varphi(\xi) = -(K+1)\xi\varphi(\xi) + 1 - \Phi(\xi)$$

donde $\varphi'(\xi) = \frac{-\xi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} = -\xi\varphi(\xi)$.

Recordando que se llamó $K = \frac{c}{n}$, o sea el cociente entre el número de observaciones censuradas y de observaciones completas. Si se

considera, de acuerdo a la notación, $p = \frac{n}{N}$ la razón de censura, entonces:

$$K = \frac{(1-p)N}{pN} = \frac{1-p}{p} .$$

De lo anterior puede verse que los valores de K son independientes del tamaño de muestra. Los valores de K mayores que 1 indican un mayor número de observaciones censuradas en relación a las completas.

Interesa analizar los ceros de la función $g(K, \xi)$, la cual tiene las siguientes propiedades:

1. $g'(K, \xi) \geq 0$, si $\xi \leq 0$, ya que resulta $-(K+1)\xi\phi(\xi) \geq 0$ y $1-\Phi(\xi) \geq 0$, por lo tanto la función $g(K, \xi)$ es creciente si $\xi \leq 0$.
2. $g(K, 0) = K\phi(0) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} > 0$.
3. Si $\xi > 0$, $g(K, \xi) = K\phi(\xi) + \xi(1-\Phi(\xi)) > 0$, porque cada sumando de $g(K, \xi)$ lo es.

De estas tres condiciones se infiere que la función $g(K, \xi)$, si tiene un cero, debe ser un valor negativo, como ya se había notado.

Para ver que $g(K, \xi)$, en efecto tiene un cero, basta probar que esta función toma un valor negativo, para algún $\xi < 0$, ya que como se trata de una función continua, el Teorema del Valor Medio asegura que la función tomará todos los valores comprendidos entre dicho valor negativo y $\frac{K}{\sqrt{2\pi}} > 0$, y por lo tanto deberá pasar por cero.

Dado que K es menor o igual que 9 para todo p mayor o igual que 0.1, resulta,

$$g(K, -2) = K\phi(-2) - 2(1-\Phi(-2)) = K0.9772499 - 1.9545 \leq 9*0.9772499 - 1.9545 = -1.468581$$

Por lo tanto, cualquiera sea el valor de la constante $0 \leq K \leq 9$, la función $g(K, \xi)$ siempre toma un valor negativo en -2, lo que indica que existe un cero que pertenece al intervalo $(-2, 0)$.

Para hallar este cero de la función en $g(K, \xi)$ y teniendo en cuenta que $g(K, -2) < 0$, se desarrolló un programa, para cada valor de K fijo, que permite aproximar la raíz de $g(K, \xi)$ con la precisión que se desee. Este programa está basado Teorema del Valor Medio y utiliza el método de bisección y se ha elegido un error $e < 10^{-7}$. El método tiene un orden de convergencia lineal pero es muy rápido para encontrar la raíz de $g(K, \xi)$, para cada K fijo.

Utilizando el programa 5.1 que se encuentra en Apéndice 2, se obtuvo Tabla 5.2.1 que presenta el valor del cero de la función $g(K, \xi)$ para algunos valores de p y de K .

Tabla 5.2.1

Valor de p	Valor de K	Cero hallado
0.1	9	-1.420187
0.2	4	-1.061516
0.3	7/3	-0.8189452
0.4	3/2	-0.6516243
0.5	1	-0.5060548
0.6	2/3	-0.3813478
0.7	3/7	-0.271502
0.8	1/4	-0.1728157
0.9	1/9	-0.08287959

Volviendo ahora al problema inicial planteado en Ecuación (5.12), hay que encontrar ξ tal que resulte un cero de la función que se llamará,

$$f(h, \xi) = \frac{s^2}{(\bar{x} - T)^2} - \frac{1 - Y(h, \xi)(Y(h, \xi) + \xi)}{(Y(h, \xi) + \xi)^2}. \quad (5.18)$$

Siendo $\xi = \frac{T - \mu}{\sigma}$, donde μ y σ son los parámetros desconocidos que se desea estimar.

Según lo visto, esta función no está definida en los valores indicados en Tabla 5.2.1 para el correspondiente valor de K . Cerca de dichos valores la función toma valores grandes.

La función $f(h, \xi)$ es continua fuera de un intervalo alrededor de los puntos señalados en Tabla 5.2.1.

Se desarrollaron dos programas para encontrar el valor de ξ , cero de $f(h, \xi)$, uno por el ya mencionado método de bisección y otro por el método de la secante, que permite llegar en general a la estimación de la raíz más rápido que por el método de bisección, siendo en general su convergencia de orden cuadrático.

El método de la secante es muy similar al conocido método de Newton-Raphson, sólo que en lugar de tomar la pendiente de la recta tangente toma la de la recta secante, de allí su nombre. En efecto, para obtener el valor de x tal que $f(x)=0$, a partir de dos valores iniciales x_0 y x_1 , se genera una sucesión $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ y se define:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}.$$

La ventaja del método de la secante sobre el de Newton-Raphson es que no es necesario evaluar la derivada de la función $f(x)$, que en el caso de la función (5.18) es complicado de obtener. Su ventaja sobre el método de bisección es que la sucesión, si converge, lo hace más rápidamente requiriendo menos iteraciones para hallar la solución con la misma precisión.

Generalmente, tanto el método de la secante como el de Newton-Raphson se emplean para refinar una primera aproximación obtenida con otras técnicas, como bisección.

El problema fundamental en cualquiera de los métodos numéricos es partir de valores iniciales adecuados. En general tanto en el método de bisección como en el de la secante, de acuerdo a la definición de dichos métodos, se requiere partir de dos valores iniciales distintos. Como en cualquier problema numérico, si los puntos no se eligen correctamente la sucesión puede no converger o puede converger a valores que pueden no resultar los ceros buscados.

Un teorema (Burden and Faires, 1985) asegura que si $f(x) \in C^2[a, b]$ y $p \in [a, b]$ es tal que $f(p)=0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que el método de Newton-Raphson (y el de la secante) genera una sucesión $(p_i)_i$ que converge a p para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

Para evitar verificar estas hipótesis en el caso de la función (5.18), es recomendable para resolver un problema particular, emplear el método de bisección o bien iniciar una sucesión por bisección y luego pasar a secante.

Se propone tomar como uno de los puntos iniciales de la sucesión, la estimación de ξ dada en (5.19),

$$\hat{\xi} = \frac{T - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{T - \bar{x}}{s} , \quad (5.19)$$

que ya se observó resulta siempre positivo. Si el otro valor inicial es tal que resulta muy próximo al cero del denominador según la razón de censura que se tenga, la sucesión diverge o puede converger a mínimos locales que no resultan ceros de la función en estudio. Lo mismo sucede si, a partir de un cierto valor inicial, la sucesión es tal que en algún paso se obtienen valores cercanos al cero.

Se elaboró un programa de bisección el cual, tal como se indicó anteriormente, se recomienda emplear para hallar la solución buscada o bien para obtener aproximaciones iniciales para luego pasar al programa de la secante. En la presente tesis, se utilizará en general el primer método, ya que asegura que si converge lo hace al cero de la función buscada.

También se elaboró un programa que calcula las estimaciones de máxima verosimilitud para una muestra dada, con censura simple a la derecha de tipo II o de tipo I. En este último caso, se debe dar además un valor inicial adicional que es el valor de censura fijo T (programa 5.4.2).

Como h es la proporción de observaciones censuradas, ésta es siempre positiva. Luego, si por haber partido de un valor inicial no apropiado se obtiene un valor de h que es negativo o si se está muy cerca de los puntos de discontinuidad del denominador, el procedimiento devuelve un mensaje de error e incluye una condición de parada si no se llega a la solución con una precisión establecida previamente en 10^{-7} .

Para los programas mencionados, se debe dar sólo un valor inicial ya que la estimación indicada en (5.19) es calculada dentro del programa.

Para propósitos de simulación, se ha elegido el programa de bisección, con un valor inicial mientras que para resolver un

problema práctico en particular, se desarrolló el programa 5.5 que se encuentra en Apéndice 2, el cual que no necesita un valor inicial. Dicho programa calcula las estimaciones de máxima verosimilitud para una muestra censurada de tipo II proveniente de una distribución normal, mediante bisección y utiliza distintos valores entre una sucesión de valores iniciales (grilla) hasta encontrar el que asegura la convergencia. Este programa puede utilizarse tanto para muestras con censura como completas, de cualquier tamaño y poseer cualquier proporción de observaciones censuradas, por lo que resulta ser muy general. En el caso de que no haya observaciones censuradas, este programa simplemente devuelve las estimaciones de máxima verosimilitud usuales para muestra completas dadas en (4.1).

Como los estimadores han sido deducidos para el caso de una muestra normal, para muestras de distribuciones que no son normales con censura a la derecha, el programa puede no converger. Esta situación está considerada dentro del programa, en cuyo caso señala un mensaje de error.

5.2.3 Caso de censura simple a izquierda

En este caso se puede realizar un desarrollo similar al anterior, teniendo en cuenta que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ la función de verosimilitud tiene la forma (Klein y Moeschberger, 1977):

$$L(\mu, \sigma^2, x_1, \dots, x_n) = \kappa (F(T))^c \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

donde $x_i \geq T$, $1 \leq i \leq n$,

n : número total de observaciones completas.

$c = N - n$: número de observaciones censuradas a izquierda.

κ : constante que no depende de los parámetros.

$F(x)$: distribución acumulada de la variable aleatoria X .

$f(x)$: función de densidad de X .

Según sugiere Stephens (1986) se puede adaptar lo hecho para censura a la derecha al caso de censura a la izquierda: cambiando los signos

de todas las observaciones dadas. La nueva muestra obtenida resulta así censurada a la derecha. Se utiliza el hecho de que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la variable aleatoria $-X$ pertenece a la misma familia normal ya que $-X \sim N(-\mu, \sigma)$.

5.3 Estimadores lineales para los parámetros de una distribución normal a partir de una muestra censurada

Si bien se sabe que EMV poseen buenas propiedades, ya que son insesgados o asintóticamente insesgados y eficientes, se ha visto que su cálculo en el caso de una muestra censurada de una distribución normal presenta dificultades prácticas. Para un problema en particular pueden ser obtenidos mediante métodos numéricos pero no resulta práctico utilizar métodos numéricos para realizar simulaciones, que es uno de los objetivos de este trabajo.

Un método alternativo consiste en obtener los mejores estimadores insesgados lineales (BLUE) de los parámetros que son combinaciones lineales de los estadísticos de orden y tienen mínima varianza en la clase de los estimadores lineales e insesgados.

Existen tabulaciones para muestras pequeñas de la matriz de varianza y covarianza de los estadísticos de orden de una muestra aleatoria $X \sim N(0,1)$ y también existen tablas que proveen los coeficientes de las combinaciones lineales de dichos estadísticos que permiten obtener las estimaciones (Sarhan y Greenberg, 1956, 1962). Sin embargo, esto también resulta poco práctico para ser utilizado en una simulación.

Estimadores lineales alternativos de la media y desvío de una distribución normal muy sencillos fueron propuestos por Gupta (1952) para ser utilizados en tamaños de muestra mayores que 10. Se denominan lineales ya que son combinaciones lineales de los estadísticos de orden disponibles en la muestra censurada.

Considerando el caso de censura simple a la derecha, pueden ser escritos en la siguiente forma, siguiendo con las notaciones anteriores:

$\hat{\mu}^* = \sum_{i=1}^n b_i X_{(i)}$ y $\hat{\sigma}^* = \sum_{i=1}^n c_i X_{(i)}$ donde $X_{(i)}$ es el i -ésimo estadístico de orden de la muestra aleatoria.

Como se verá, estos estimadores se obtienen aplicando el método de mínimos cuadrados a la regresión de $X_{(i)}$ en m_i que es el valor esperado del i -ésimo estadístico de orden de una muestra de tamaño N de una población $X \sim N(0,1)$.

Los valores de m_i están tabulados (Harter H., 1961) o pueden ser aproximados por (Blom, 1958):

$$m_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i-0.375}{N+0.125}\right) \quad (5.20)$$

En efecto, si se supone que $X_1, X_2, \dots, X_N$ es una muestra aleatoria de una distribución $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, y $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ sus estadísticos de orden. Si $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, entonces $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ es una muestra aleatoria $N(0,1)$, $X_i = \mu + \sigma Z_i$ y $E(X_{(i)}) = \mu + \sigma E(Z_{(i)}) = \mu + \sigma m_i$.

Un gráfico de $X_{(i)}$ vs. m_i será aproximadamente lineal con pendiente σ y ordenada al origen μ . Este gráfico, como ya se ha visto en Tabla 1.2 resultaría un gráfico QQ. Lo que se verá a continuación es la estimación de los parámetros por el método de mínimos cuadrados. Se supone entonces que la muestra presenta censura simple a derecha, de modo tal que sólo se dispone de las primeras n observaciones en la muestra ordenada: $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$.

Luego, estimaciones de los parámetros se podrán obtener a partir de la regresión de $X_{(i)}$ en m_i , para $1 \leq i \leq n$, considerando

$$D(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - (\mu + \sigma m_i))^2.$$

Derivando $D(\mu, \sigma)$ respecto a cada parámetro, resulta que los estimadores de mínimos cuadrados deben satisfacer:

$$\frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = -2 \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - (\mu + \sigma m_i)) = 0,$$

$$\frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = -2 \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - (\mu + \sigma m_i)) m_i = 0.$$

o equivalentemente,

$$n\mu + \sigma \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n x_{(i)} ,$$

$$\mu \sum_{i=1}^n m_i + \sigma \sum_{i=1}^n m_i^2 = \sum_{i=1}^n x_{(i)} m_i .$$

Llamadas ecuaciones normales.

Despejando μ y σ de ambas ecuaciones, se obtiene,

$$\hat{\mu}^* = \bar{X}_{(i)} - \hat{\sigma}^* \bar{m} , \quad (5.21)$$

y

$$\hat{\sigma}^* = \frac{(\sum_{i=1}^n X_{(i)})\bar{m} - \sum_{i=1}^n X_{(i)} m_i}{\frac{(\sum_{i=1}^n m_i)^2}{n} - \sum_{i=1}^n m_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m}) X_{(i)}}{\sum_{i=1}^n m_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n m_i)^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m}) X_{(i)}}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2} = \sum_{i=1}^n c_i X_{(i)} , \quad (5.22)$$

donde
$$c_i = \frac{m_i - \bar{m}}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2} .$$

Y reemplazando en (5.21) se obtiene,

$$\hat{\mu}^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_{(i)}}{n} - \bar{m} \sum_{i=1}^n c_i X_{(i)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{m} c_i \right) X_{(i)} = \sum_{i=1}^n b_i X_{(i)} , \quad (5.23)$$

donde
$$b_i = \frac{1}{n} - \bar{m} \frac{(m_i - \bar{m})}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2} .$$

Las estimaciones lineales obtenidas en (5.22) y (5.23) son las planteadas por Gupta (1952). Por supuesto, si no existen observaciones censuradas también se pueden aplicar las estimaciones de Gupta, en este caso $n=N$. Estos estimadores son asintóticamente eficientes (Ali and Chan (1964)) y son muy utilizados en las publicaciones relacionadas con la estimación de parámetros de la distribución normal en el caso de muestras censuradas, ya que resultan fáciles de calcular, existen siempre y por lo tanto son útiles para emplear en una simulación. Son combinaciones lineales de

las observaciones completas pero utilizan la información de que provienen de una muestra de tamaño N , como puede observarse en (5.20). Desarrollos similares a los presentados pueden obtenerse para censura simple a la izquierda y para censura doble.

El programa 5.6 (llamado Gupta) de Apéndice 2, dado el tamaño de la muestra y las observaciones completas de la misma, calcula las estimaciones de Gupta (1952) tanto se trate de censura simple a la derecha de tipo I o de tipo II.

5.4 Estimación de la eficiencia relativa de los estimadores de Secciones 5.2 y 5.3

Para comparar los estimadores presentados en Secciones 5.2 y 5.3, se ha estudiado la eficiencia relativa del EMV con el de Gupta, tanto para la estimación de la media como del desvío de una muestra normal censurada a la derecha.

Para ello, se estimó el error cuadrático medio de cada estimador utilizando 10000 replicaciones de muestras de tamaños: 30, 40, 50, 60, 80 y 100 y proporciones de observaciones censuradas de 0.2 a 0.9 con paso 0.1. Las muestras se generaron desde una distribución normal estándar. El error cuadrático medio (ECM) está dado por,

$$ECM_{\theta}(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{Nrep} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{Nrep} ,$$

siendo

$Nrep$: número de replicaciones

θ : parámetro de la distribución de interés

$\hat{\theta}_i$: estimación del parámetro θ obtenida en la i -ésima replicación.

Cabe aclarar que se comparó la eficiencia relativa de ambos estimadores en base al mismo número de replicaciones. En el caso de los estimadores de máxima verosimilitud se empleó el programa 5.5 que asegura encontrar la solución entre una grilla de valores iniciales. Dicho programa se encuentra en Apéndice 2.

Luego de haber estimado el error cuadrático medio para cada estimador, se calculó la eficiencia relativa (ER), dada por,

$$\hat{ER} = \frac{ECM(\hat{\theta}_{MV})}{ECM(\hat{\theta}_G)},$$

siendo

$\hat{\theta}_{MV}$ el EMV y $\hat{\theta}_G$ el estimador de Gupta del parámetro θ .

Los valores obtenidos de la *ER* han resultado, como se esperaba, menores que uno indicando que el estimador de máxima verosimilitud es más eficiente. En las Figuras 5.1 y 5.2 se muestra la *ER* estimada en los casos estudiados, multiplicada por 100.

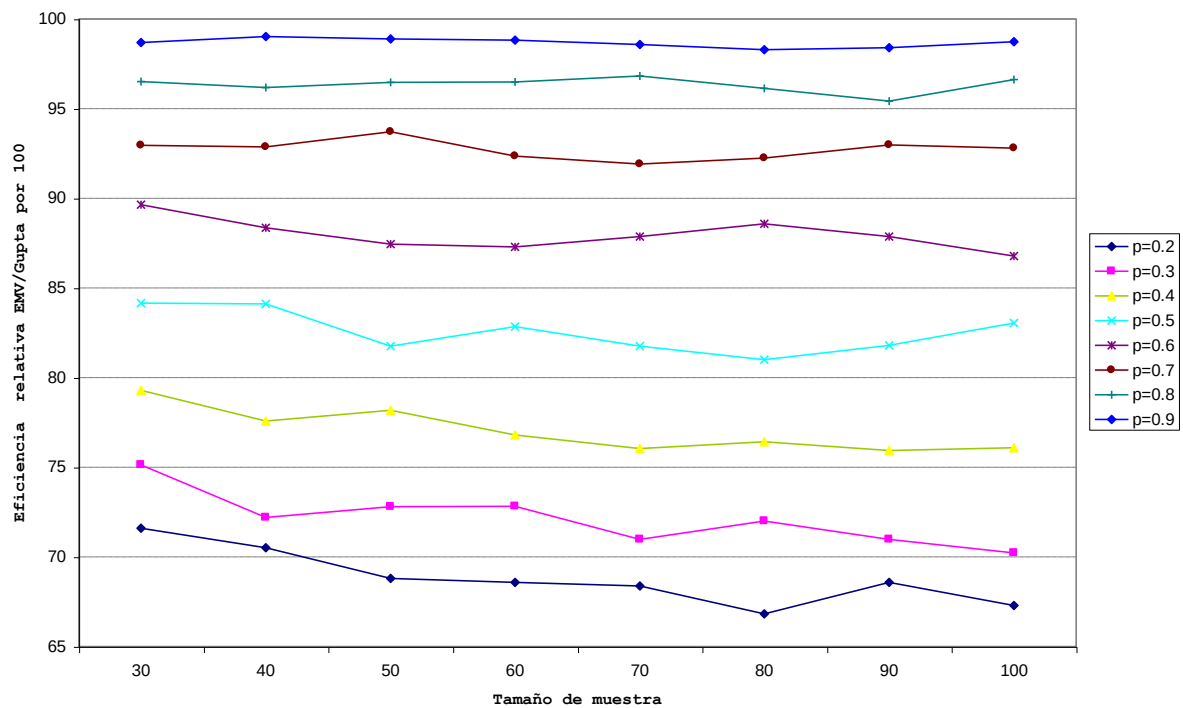


Figura 5.1. Eficiencia relativa para la media

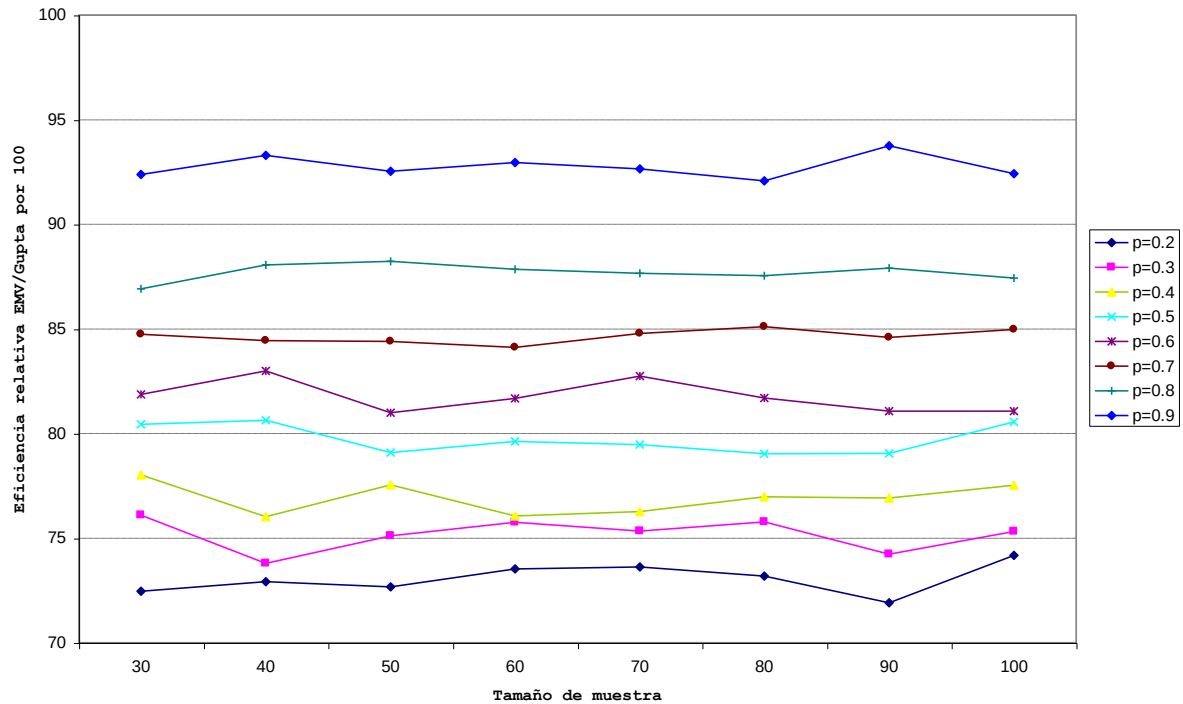


Figura 5.2. Eficiencia relativa para el desvío.

Desde Figuras 5.1 y 5.2, se observa que a medida que la razón de censura es mayor, la eficiencia relativa aumenta.

En el caso de la estimación de la media, para razones de censura mayores a 0.6, la *ER* es mayor que el 0.9. A partir de una razón de censura de 0.3, la *ER* siempre es mayor que 0.7.

Para el caso del desvío, la *ER* estimada es algo menor que la *ER* obtenida para la media. Para razones de censura mayores de 0.6, la *ER* resulta superior al 85% mientras que para todas las proporciones de observaciones completas estudiadas, la *ER* es mayor al 70%.

Se puede concluir que los estimadores de Gupta resultan, como era de esperar, menos eficientes que los de máxima verosimilitud, pero la pérdida de eficiencia no es muy grande, sobre todo cuando se trabaja con una razón de censura mayor que 0.5.

5.5 Ejemplos de aplicación

Con el fin de comparar los resultados obtenidos utilizando los programas desarrollados con los resultados mostrados por distintos

autores, se replican ejemplos presentados por Cohen (1999, Ejemplos 11.1 y 11.2).

También, se simularon muestras de distinto tamaño y razón de censura y se aplicaron los métodos de estimación propuestos en Secciones 5.2 y 5.3. Se compararon los resultados que se obtuvieron con los métodos propuestos y con los obtenidos mediante el empleo de la Tabla 2.3 que provee Cohen (1999, páginas 21-24). Ejemplo 5.5.3 muestra estos resultados.

Ejemplo 5.5.1

Gupta (1952) presentó los resultados de un experimento de supervivencia realizado sobre 10 ratones de laboratorio que fueron inoculados con tuberculosis humana (Cohen, 1991). El experimento se dio por finalizado cuando murieron siete ratones. Se trata de un caso de una muestra con censura de tipo II simple a la derecha. Gupta supuso que el logaritmo en base 10 de la vida en días de estos ratones tenía distribución normal.

Los tiempos de supervivencia (Y en días) desde la inoculación hasta la muerte y sus logaritmos (X_2), para las siete observaciones completas se presentan en Tabla 5.5.1.

Tabla 5.5.1

Y	41	44	46	54	55	58	60
X ₂	1.612784	1.643453	1.662758	1.732394	1.740363	1.763428	1.778151

En la Tabla 5.5.2 se presentan las estimaciones obtenidas por los distintos métodos.

Tabla 5.5.2

Método	Número de iteraciones	$\hat{\xi}$	$\lambda(h, \hat{\xi})$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
EMV por bisección	28	0.4505703	0.5124717	1.7424085	0.0794361
EMV Cohen (1991)	–	–	0.51249	1.7424000	0.07943
Gupta(prog. 5.6)	–	–	–	1.7462948	0.09336249
Gupta(1952)	–	–	–	1.7480000	0.094

Para obtener las estimaciones se estableció un criterio de convergencia de modo tal que el programa se detenga cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas sea menor que 10^{-7} .

El programa que se desarrolló permite también obtener $\hat{\xi}$ mientras que Cohen (1991) no indica dicha estimación. Se observa que las cuatro estimaciones de la media son muy similares, no así las del desvío estándar.

Cohen (1991) interpola linealmente en su tabla, sin embargo los resultados que obtiene son muy similares a los aquí obtenidos. En cambio difieren ligeramente de los efectuados por Gupta (1952) quien no utilizó computadora. Ésto puede explicar las diferencias entre los valores que se obtuvieron y los consignados por Gupta (1952).

Ejemplo 5.5.2

Nelson (1982) presenta una muestra censurada a la derecha de tipo I, consistente en la duración en miles de horas de servicio de 96 controles electrónicos de locomotoras. Las observaciones fueron discontinuadas en $T = 135$ (fijo), con el resultado que 37 fallaron antes de la terminación del experimento, produciéndose así $c = 59$ observaciones censuradas.

Nelson (1982) supuso que el logaritmo en base 10 de estos tiempos (X) se distribuye normalmente. En este caso $N = 96$, $n = 37$ y $c = 59$ y $\log T = \log_{10}(135) = 2.130334$. Tabla 5.5.3 contiene la duración en unidades en miles de horas de servicio de los 37 controles que fallaron.

Tabla 5.5.3

Miles de horas de servicio hasta la falla de 37 controles de locomotoras					
22.5	66.5	82.0	122.5	77.0	117.0
57.5	80.0	102.5	118.5	132.5	37.5
81.5	107.0	119.0	134.0	46.0	68.0
108.5	120.0	48.5	69.5	83.0	112.5
51.5	76.5	84.0	113.5	123.0	53.0
91.5	116.0	127.5	54.5	78.5	93.5
131.0					

Fueron necesarias 21 iteraciones para lograr la precisión establecida de 10^{-7} , utilizando el programa que obtiene la estimación de máxima verosimilitud de los parámetros mediante bisección. Los resultados obtenidos se resumen en Tabla 5.5.4 junto con los obtenidos por Cohen (1991).

Tabla 5.5.4

Método	$\hat{\xi}$	$\lambda(h, \hat{\xi})$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
EMV por Bisección	-0.3000025	1.438464	2.2222522	0.3063922
Cohen (1991)	-0.305	1.448	2.224	0.307
Gupta(prog. 5.6)	-	-	2.0372047	0.1187191

La tabla 5.5.4 indica que resultados obtenidos son totalmente consistentes con los obtenidos por Cohen (1991, página 29).

Como no se utilizó la información sobre los tiempos de duración de los elementos que no fallaron, que son mayores que $\log T = \log_{10}(135)$, se puede incluir este dato en la muestra como un dato más, tal como propuso Nelson (1973). Entonces, se obtiene que,

$$\hat{\mu}_G = 2.0481316 \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_G = 0.1266283.$$

En este ejemplo, las estimaciones lineales que se obtuvieron resultaron menores que las de máxima verosimilitud. Lo observado es esperable si se tiene en cuenta el comportamiento de la eficiencia relativa de ambos estimadores (ver Figuras 5.1 y 5.2).

Ejemplo 5.5.3

Se generó al azar una muestra de tamaño 20 de una distribución $X \sim N(0,1)$ y se censuró el 20% de las observaciones mayores (censura tipo II a la derecha). Es decir que se conservaron los 16 primeros elementos en la muestra ordenada. En este caso, $N=20$, $c=4$ y $n=16$. La muestra completa se presenta en Tabla 5.5.5.

Tabla 5.5.5

-1.84238220	-1.39780454	-1.29259679	-1.21966464	-0.96811866	-0.79851741
-0.68203427	-0.59688026	-0.46205649	-0.42899805	-0.30642403	-0.04855545
0.06408084	0.10342087	0.21638811	0.34382239	1.14187616	1.81963653
2.00492090	3.06567373				

En Cohen (1991, Tabla 2.3, página 21), se buscó con $h=0.2$ y con el valor de $\hat{\alpha} = \frac{s^2}{(\bar{x}-T)^2} = 0.4782037$, redondeando a dos dígitos, o sea 0.48.

Se encontró que el valor que brinda Tabla de Cohen (1991) es $\lambda(h, \hat{\xi}) = 0.30059$.

Siendo $\bar{x} = -0.58227$, se obtuvieron entonces, las siguientes estimaciones:

$$\hat{\mu}_{EMV} = -0.58227 - 0.30059 * (-0.58227 - 0.34382239) = -0.3038959$$

$$\text{y } \hat{\sigma}_{EMV} = \sqrt{(0.3844971 + 0.30059 * ((-0.58227 - 0.34382239)^2))} = 0.8014345.$$

Los resultados se resumen en Tabla 5.5.6.

Tabla 5.5.6

Método	$\hat{\xi}$	$\lambda(h, \hat{\xi})$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
EMV por bisección	0.8134808	0.297481	-0.3067747	0.7997695
Cohen (1991)	-	0.30059	-0.3038959	0.8014345
Gupta(prog.5.6)	-	-	-0.3049225	0.8532849

La tabla dada en Cohen (1991, página 21) muestra valores con una precisión de 5 dígitos decimales para la función $\lambda(h, \hat{\xi})$ y de dos

dígitos para $\hat{\alpha} = \frac{s^2}{(\bar{x}-T)^2}$. Cohen (1991) indica que se debe interpolar

linealmente cuando los valores no se hallen en la tabla, por lo que se infiere que las estimaciones encontradas por el programa presentado resultan más exactas. Se requirieron 28 iteraciones para obtener la precisión establecida. En este caso, las estimaciones de Gupta no difieren tanto de las de máxima verosimilitud. Esto es coherente con el estudio de eficiencia realizado en Sección 5.4, ya que cuando $p=0.8$, como en este ejemplo, la eficiencia de la estimación de la media es superior a 0.95 y la de la estimación del desvío es mayor que 0.85 cualquiera sea el tamaño de la muestra.

5.6 Tests de bondad de ajuste a una distribución normal con parámetros desconocidos en el caso de muestras censuradas

En este caso, la hipótesis nula es:

$$H_0: F \equiv N(\mu, \sigma^2), \quad (5.24)$$

siendo F la distribución hipotética de la población de la cual proviene la muestra aleatoria de tamaño N censurada a la derecha.

En Sección 5.6.1 se proponen un estadístico modificado de K-S y una extensión del tipo *DSP* de Michael (1983) para resolver este problema. Se calcularán por simulación los cuantiles de las distribuciones de ambos estadísticos bajo la hipótesis nula.

Pettitt y Stephens (1976) proponen versiones de los estadísticos de Cramer-Von Mises W^2 , Anderson Darling A^2 y Watson U^2 para muestras censuradas provenientes de una distribución completamente especificada, modificando el límite superior de integración en la definición de dichos estadísticos.

Stephens (1986) incluye tablas de percentiles obtenidos por simulación de los estadísticos A^2 y W^2 para la hipótesis planteada al inicio de esta sección, tanto para el caso de una muestra completa como de una muestra con censura simple de tipo II a la derecha, provenientes de una distribución normal con parámetros desconocidos. Stephens (1986) utiliza las estimaciones de Gupta para los parámetros y no consigna resultados sobre la potencia de los tests propuestos.

Ahmed and Hala (2005) proponen estadísticos A^2 y W^2 modificados para el mismo problema, en forma completamente análoga a lo que propone Stephens (1986). Emplean también estimaciones de Gupta para los parámetros, pero reemplazan la FDE por un estimador de núcleos gaussiano de la densidad. Concluyen su trabajo con un estudio de la potencia para los tests basados en los estadísticos que proponen para determinados tamaños de muestra y fracción de censura fijo en 0.6. Ellos no realizan comparaciones con los tests propuestos por Stephens (1986).

5.6.1 Tests basados en los estadísticos de D y DSP

Para resolver el test planteado en (5.24) se proponen a continuación estadísticos modificados D y DSP . Se supone que se tiene una muestra de tamaño N con censura a la derecha simple de tipo II, y se tienen n observaciones completas. La razón de censura es por lo tanto igual

$$a \quad p = \frac{n}{N}.$$

Primero, se deben calcular las estimaciones de los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$, por máxima verosimilitud o por el método de Gupta. Con estas

estimaciones se hallan $Y_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, para $i=1,2,\dots,n$ y

$Z_{(i)} = \Phi(Y_{(i)})$, para $i=1,2,\dots,n$. A partir de estos cálculos se definen los siguientes estadísticos modificados de D y DSP :

$${}_2D_{n,N}^* = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i-0.5}{N} - z_{(i)} \right| \right\} + \frac{0.5}{N} \quad (5.25)$$

$${}_2DSP_{n,N}^* = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \arcsen\left(\frac{i-0.5}{N}\right)^{0.5} - \arcsen(z_{(i)}^{0.5}) \right| \right\}. \quad (5.26)$$

Estos estadísticos se denominan modificados, ya que los parámetros que están implícitos en estas expresiones deben ser estimados. Se ha utilizado notación similar al caso de muestras censuradas de una distribución completamente especificada: los subíndices indican el tipo de censura, el número de observaciones completas y el tamaño de la muestra, mientras que el asterisco indica que se han estimado los parámetros.

5.6.2 Algoritmo de cálculo

De acuerdo a las definiciones dadas en Sección 5.6.1, se puede establecer el siguiente algoritmo para realizar el test planteado:

1. Calcular las estimaciones $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$, ya sea por máxima verosimilitud o por el método de Gupta.

2. Hallar $Y_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, para $i=1,2,\dots,n$.
3. Calcular $Z_{(i)} = \Phi(Y_{(i)})$, para $i=1,2,\dots,n$.
4. Utilizando $Y_{(i)}$ y $Z_{(i)}$ obtener los estadísticos ${}_2D_{n,N}^*$ y ${}_2DSP_{n,N}^*$.
5. Comparar los estadísticos ${}_2D_{n,N}^*$ y ${}_2DSP_{n,N}^*$ con Tablas A9-A12 dadas en Apéndice 1, según se utilicen estimaciones de máxima verosimilitud o de Gupta. Estas tablas se consultan entrando según la razón de censura de la muestra p .
6. Se rechaza la hipótesis nula para un nivel de significación α si el valor obtenido del estadístico es mayor que el $1-\alpha$ percentil que se deduce de la tabla correspondiente (A9, A10, A11 o A12 de Apéndice 1).

Estos tests se adaptan al caso de censura a la izquierda de tipo II, según se indicó anteriormente cambiando el signo de todos los datos y obteniéndose así una muestra censurada a la derecha.

Para el caso de censura a la derecha de tipo I, como $p = \Phi\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right)$

depende de parámetros desconocidos debe ser estimado: $\hat{p} = \Phi\left(\frac{T - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$.

Por consiguiente, no se darán para este test percentiles ya que no es posible obtener p en forma exacta.

Stephens (1986) indica que se puede utilizar la misma tabla de percentiles obtenidos por simulación para los estadísticos A^2 y W^2 para la hipótesis planteada en el caso de censura a la derecha de tipo II, obteniéndose un test de nivel aproximado, especialmente en el caso de muestras grandes y valores de fracción de censura mayores que 0.2.

5.6.3 Obtención de tablas de percentiles

Los percentiles de las distribuciones de los estadísticos bajo H_0 se obtuvieron por simulación con 10000 replicaciones para cada tamaño de muestra y razón de censura considerados.

En el caso de los EMVs se obtuvo un valor inicial que resultó adecuado para todos los tamaños de muestra y razón de censura, debido a que no se obtuvieron muestras para las cuales el método no convergiera. El punto obtenido fue -0.75 y se logró a partir de una grilla, probando con distintos valores iniciales. Se comenzó por un tamaño de muestra de 30 y razón de censura de 0.3.

Para la simulación con el método propuesto por Gupta también se consideraron 10000 replicaciones para cada tamaño muestral y razón de censura.

Las estimaciones de Gupta pueden utilizarse aun con fracciones de censura y tamaños de muestra pequeños. Por esta razón, se comenzó con una razón de censura del 10%. Stephens (1986) en sus tablas de percentiles obtenidos por simulación de los estadísticos A^2 y W^2 comienza con un tamaño muestral igual a 20 y razón de censura igual a 0.2.

Los percentiles obtenidos para la distribución de cada estadístico son similares y en general coinciden hasta el segundo dígito decimal. En especial, al aumentar el tamaño de muestra y cuanto más grande es la razón de censura.

Se calcularon también cuantiles de la distribución de cada estadístico propuesto bajo H_0 tomando también $p=1$, es decir, cuando no hay censura y, como era de esperar, resultaron muy similares a los ya obtenidos en las tablas correspondientes a los percentiles de los estadísticos D y DSP , dados en fórmulas (4.3) y (4.4) respectivamente, cuando se estimaron los parámetros de la distribución normal en el caso de una muestra completa (Tablas A7 y A8 de Apéndice 1). El módulo de la diferencia entre cada valor obtenido es del orden de 10^{-4} y en algunos casos inferior a 10^{-6} .

5.7 Bandas de aceptación derivadas de los tests presentados en Sección 5.6

En forma análoga la derivación de bandas de aceptación a partir de los tests de bondad de ajuste a una distribución completamente especificada en Secciones 2.7 y 3.3 para muestras con censura, se puede hacer ahora para los tests planteados en Sección 5.6, pero

utilizando los percentiles obtenidos en Sección 5.6.3. Es decir se pueden construir bandas de aceptación para los gráficos *PP*, *DSP* y *QQ* que delimitan regiones tales que si todos los puntos graficados se encuentran dentro de ellas no se rechaza la hipótesis nula. Esto permite realizar tests visuales de bondad de ajuste.

Como ya se ha señalado en secciones anteriores, realizar los tests con un nivel de significación α y trazar los gráficos respectivos para ver si todos los puntos caen dentro de la región de aceptación de nivel $1-\alpha$ resulta equivalente.

No se realizará aquí la deducción de las bandas ya que es análoga a la desarrollada en Sección 3.3, sólo que ahora se deben utilizar los cuantiles de Tablas A9, A10 o A11 y A12 de Apéndice 1.

En el Apéndice 2 se incluyen los programas 5.11.1, 5.11.2 y 5.11.3 que permiten realizar los gráficos *PP*, *DSP* y *QQ* para una muestra censurada a la derecha de tipo II. Dichos gráficos se pueden realizar para todo tamaño de muestra y valor de razón de censura considerados en tablas A9 y A10, de Apéndice 1, pues dichos programas utilizan las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros de la muestra. Como resultado, además de realizar los gráficos, dan los valores calculados de los estadísticos ${}_2D_{n,N}^*$ y ${}_2DSP_{n,N}^*$ junto con la decisión para el nivel de significación elegido (1 significa rechazo y 0 aceptación).

Para correr estos programas, es necesario consultar la tabla respectiva e ingresar la muestra y los percentiles encontrados para el nivel de significación elegido.

Por supuesto, con una modificación sencilla, los programas pueden adaptarse para que empleen las estimaciones de los parámetros dadas por Gupta (1952), teniendo en cuenta que se deberán dar los percentiles calculados a partir de dichas estimaciones de los parámetros.

5.8 Potencia de los tests planteados

En esta sección, se desea estudiar y comparar la potencia de los tests que se han propuesto en Sección 5.6, tanto en el caso de estimar los parámetros según Gupta (1952) como con máxima

verosimilitud. Se estudia la potencia de estos test considerando varias alternativas.

Tabla 5.8.1 resume la potencia estimada (en porcentaje) del test propuesto en Sección 5.6, estimando μ y σ por el método de máxima verosimilitud, y con razón de censura $p=0.6$ con un nivel de significación $\alpha=0.05$. La potencia fue estimada en base a 10000 replicaciones para cada tamaño de muestra considerado, teniendo en cuenta un valor inicial para que no hubiera replicaciones para las cuales no existieran algunos valores de los estadísticos. Esto significó buscar valores iniciales distintos según la alternativa considerada.

La potencia estimada en el caso del test basado en las estimaciones con el método de Gupta, también se realizó en base a 10000 replicaciones para cada tamaño de muestra. Tabla 5.8.2 resume la potencia estimada (en porcentaje) para el test presentado al comienzo de Sección 5.6, estimando los parámetros por el método de Gupta.

En Tablas 5.8.1 y 5.8.2 se consideraron tamaños muestrales $N=30, 40, 50, 60, 80$ y 100 y razón de censura $p=0.6$ con un nivel de significación $\alpha=0.05$.

Tabla 5.8.1

EMV		Tamaño de muestra					
		N=30		N=40		N=50	
Distribución	parámetros	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$
Chi cuadrado	1	74	96	89	100	95	100
Chi cuadrado	3	22	34	32	54	39	72
Chi cuadrado	4	17	23	24	36	28	49
uniforme	(0,1)	15	27	21	46	25	64
Log-normal	(0,1)	35	49	48	71	59	85
exponencial	1	37	61	51	84	61	95
T de Student	1	76	78	87	88	92	93
T de Student	3	22	26	28	31	32	36
Normal	(0,1)	5	5	5	5	5	5
EMV		Tamaño de muestra					
		N=60		N=80		N=100	
Distribución	parámetros	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$
Chi cuadrado	1	98	100	100	100	100	100
Chi cuadrado	3	49	85	61	97	74	99
Chi cuadrado	4	35	65	47	83	57	94
uniforme	(0,1)	32	81	42	95	53	99
Log-normal	(0,1)	69	93	81	99	91	100
exponencial	1	72	98	84	100	93	100
T de Student	1	96	96	99	99	100	100
T de Student	3	38	42	44	48	53	55
Normal	(0,1)	5	5	5	5	5	5

Tabla 5.8.2

Gupta		Tamaño de muestra					
		N=30		N=40		N=50	
Distribución	parámetros	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$
Chi cuadrado	1	94	96	98	100	100	100
Chi cuadrado	3	48	42	60	57	72	73
Chi cuadrado	4	37	32	47	42	55	54
uniforme	(0,1)	33	30	42	45	53	63
Log-normal	(0,1)	63	59	76	74	86	86
exponencial	1	67	64	80	81	89	94
T de Student	1	71	71	84	83	92	91
T de Student	3	16	21	21	26	29	32
Normal	(0,1)	5	5	5	5	5	5

Gupta		Tamaño de muestra					
		N=60		N=80		N=100	
Distribución	parámetros	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$	${}_2D^*_{n,N}$	${}_2DSP^*_{n,N}$
Chi cuadrado	1	100	100	100	100	100	100
Chi cuadrado	3	79	83	89	87	95	99
Chi cuadrado	4	64	64	78	81	86	91
uniforme	(0,1)	61	77	73	83	83	98
Log-normal	(0,1)	92	93	97	98	99	100
exponencial	1	93	97	98	100	100	100
T de Student	1	95	95	98	98	100	100
T de Student	3	36	37	44	45	55	52
Normal	(0,1)	5	5	5	5	5	5

Se han realizado tablas similares para otros tamaños de razón de censura, pero como ejemplificación sólo se consignaron las que corresponden a $p=0.6$. Se fijó esta razón de censura para comparar los resultados obtenidos con la potencia estimada por Ahmed and Hala (2005).

Si se compara la potencia de los tests basados en el estadístico ${}_2D^*_{n,N}$, resulta más potente cuando se emplean las estimaciones de Gupta, excepto en el caso de la distribución t de Student. En cambio, para el estadístico ${}_2DSP^*_{n,N}$ resulta más potente el test en el que se utilizan estimaciones de máxima verosimilitud, sobre todo para tamaños de muestra mayores que 30.

Si se compara la potencia entre los test basados en ambos estimadores, la Tabla 5.8.1 muestra que el test basado en ${}_2DSP^*_{n,N}$ es más potente para todos los tamaños de muestra y alternativas consideradas.

Tabla 5.8.2 muestra que los tests son prácticamente de igual potencia para detectar las alternativas propuestas. En algunos casos, resulta más potente el test basado en ${}_2DSP^*_{n,N}$ (por ejemplo, con la distribución uniforme) y en otros el basado en ${}_2D^*_{n,N}$ para

algunos tamaños muestrales (por ejemplo, Chi cuadrado con 4 grados de libertad ($N < 60$)).

Los tests alcanzan el nivel nominal, que corresponde al último renglón de cada tabla.

Las tablas muestran potencia creciente a medida que aumenta el tamaño de muestra para cada test basado en cada estadístico.

La potencia obtenida del test basado en estimaciones de Gupta es muy similar a la indicada por Ahmed and Hala (2005), para los tests que proponen. Los autores consideraron también 10000 replicaciones para realizar las estimaciones. En cambio el test basado en ${}_2DSP^*_{n,N}$, con estimaciones de máxima verosimilitud, resulta más potente que los tests modificados de Cramer-Von Mises y de Anderson-Darling de Ahmed and Hala (2005) para tamaños de muestra mayores que 30 para las alternativas consideradas, excepto para la distribución Chi cuadrado con 4 grados de libertad y para la distribución uniforme para tamaños de muestra 30 y 40. Con estas excepciones, se puede decir que el test basado en ${}_2DSP^*_{n,N}$, con estimaciones de máxima verosimilitud, resulta más potente entre todos los propuestos para la hipótesis nula planteada y para las alternativas consideradas.

5.9 Ejemplos de aplicación

Se presentan a continuación dos ejemplos de aplicación de los tests propuestos que incluyen el cálculo de los estadísticos, empleo de las tablas de percentiles obtenidos y gráficos correspondientes. El primero, es una aplicación para un conjunto de datos tomado de la bibliografía consultada que servirá para ejemplificar cómo se realizan dichos tests en forma gráfica.

El segundo ejemplo considerado contiene datos reales y se empleará para ejemplificar la forma de realizar los tests en un caso general que pudiera presentarse en la práctica.

Ejemplo 5.9.1

Se considera un conjunto de observaciones utilizado por Michael y Schucany (1986, Capítulo 11). El conjunto de datos consiste en los 20 menores valores de los primeros 40 del conjunto que los autores

denominaron NORDATA, que consiste en una muestra generada al azar de tamaño 100 de una variable normal de media 100 y desvío 10. Se realizó el test suponiendo, para este caso, que la muestra es una muestra censurada que proviene de una distribución normal con parámetros desconocidos. Se tiene por lo tanto una razón de censura $p = 0.5$. Se realizó el test para la hipótesis nula de normalidad. Al aplicar los tests basados en los estadísticos ${}_2D_{20,40}^*$ y ${}_2DSP_{20,40}^*$ con un nivel de significación del 0.05 (programas 5.14 y 5.15) se obtuvieron los resultados que se indican en Tabla 5.9.1.

Tabla 5.9.1

Programa	Valor ${}_2D_{20,40}^*$	Valor ${}_2DSP_{20,40}^*$
Gupta	0.09570447	0.05307773
EMV	0.08942981	0.05358541
	$0.1 < p\text{-valor} < 0.25$	$0.25 < p\text{-valor} < 0.5$

Vale decir, no se rechaza H_0 para un nivel $\alpha = 0.05$ (la hipótesis de normalidad). La decisión es la misma tanto utilizando las estimaciones de Gupta como las de máxima verosimilitud. Las estimaciones de los parámetros en este ejemplo se consignan en Tabla 5.9.2.

Tabla 5.9.2

Método	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Máx. verosimilitud	98.853564	9.824932
Gupta	98.208766	9.461056

Los resultados son consistentes con los obtenidos por Michael y Schucany (1986) quienes utilizan los tests basados en estadísticos modificados de Anderson-Darling y Cramer-von Mises con estimaciones de Gupta de los parámetros. Dado que para la razón de censura del 50% no se indican percentiles, Michael y Schucany (1986) sugieren interpolar linealmente en la tabla correspondiente. Se observa que el libro D'Agostino and Stephens (1986) indica Tabla 4.5 para comparar el estadístico obtenido cuando en realidad se refiere a Tabla 4.10.

Tablas A9 a A12 de Apéndice 1 contemplan el caso de razón de censura 0.5 y tamaño de muestra 40, por lo que no es necesario interpolar. A continuación se incluyen los gráficos *PP*, *DSP* y *QQ* para la muestra censurada analizada. Se puede observar que todos los puntos se encuentran dentro de las bandas para un nivel de significación del test del 5%.

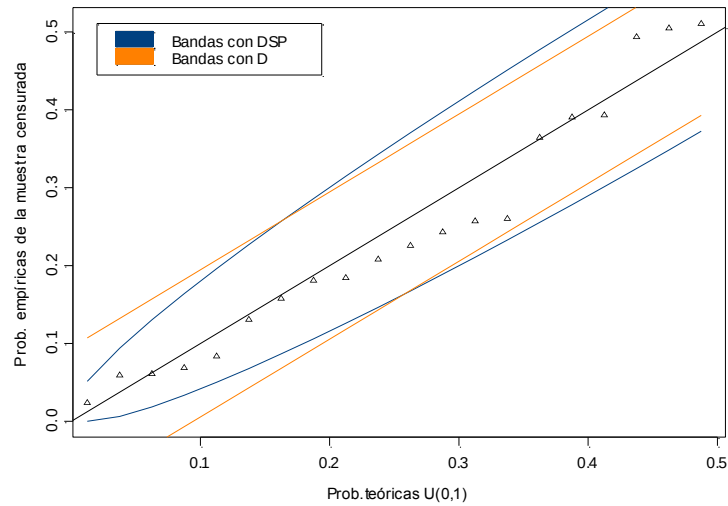


Figura 5.3. Gráfico *PP* de la muestra NORDATA de tamaño $N=40$, censurada con $p=0.5$ y bandas de aceptación del 95% (con EMV).

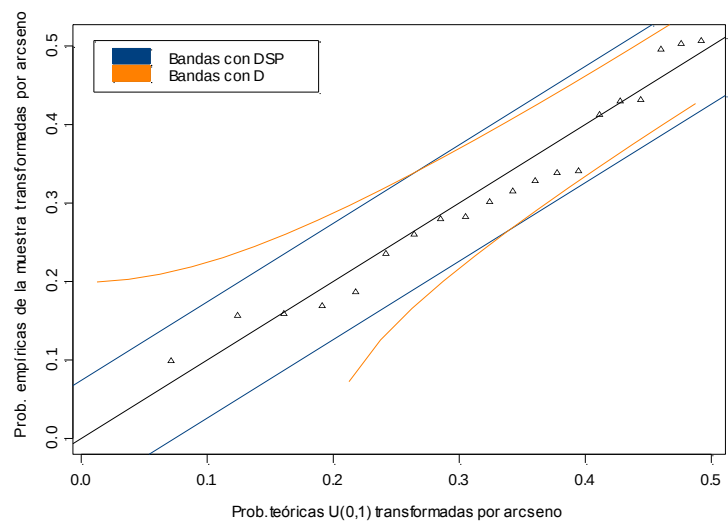


Figura 5.4. Gráfico *DSP* de la muestra NORDATA de tamaño $N=40$, censurada con $p=0.5$ y bandas de aceptación al 95% (con EMV).

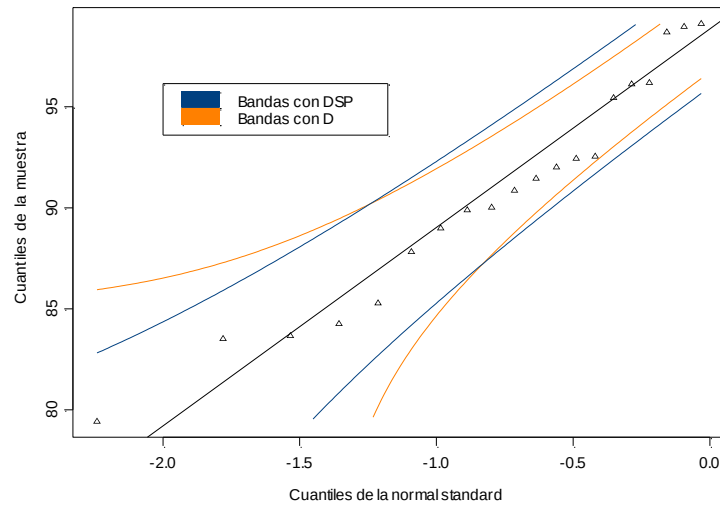


Figura 5.5. Gráfico *QQ* de la muestra NORDATA de tamaño $N=40$, censurada con $p=0.5$ y bandas de aceptación al 95% (con en EMV).

Ejemplo 5.9.2

Brown y Miller (1978) desarrollaron un método para el análisis de fatiga biaxial mediante tensiones-deformaciones unitarias locales (máxima deformación unitaria cortante y máxima deformación unitaria directa) denominado método combinado de Brown y Miller de cortante y deformación unitaria normal, implementado con procedimientos de plano crítico.

Se consideran a continuación 46 observaciones de fatiga biaxial que fueron presentados por Brown y Miller (1978) obtenidos con el método que desarrollaron. La variable NC representa el número de ciclos hasta que ocurre la falla y la variable W el esfuerzo por ciclo (medida en MJ/m^3). Las 46 observaciones se encuentran en Apéndice 3 como datos de Brown y Miller.

Se considera primero la hipótesis nula de que la muestra observada de la variable NC proviene de una distribución log-normal. Para ello se transformaron los datos aplicándoles la función logaritmo y se aplicó un test de normalidad. Vale decir dada la observación x_i , se consideró $y_i = \log(x_i)$, para $i=1,2,\dots,46$. Se realizaron los tests basados

en D y en DSP para la distribución normal de parámetros desconocidos sobre la muestra consistente en los y_i , para $i=1,2,\dots,46$, obteniendo los resultados que se indican en Tabla 5.9.3. Esta Tabla 5.9.3 resume la información obtenida con el programa que realiza el gráfico PP (programa 4.2).

Tabla 5.9.3

Valor D	Valor DSP
0.0942539	0.0958280
$0.25 < p\text{-valor} < 0.5$	$0.01 < p\text{-valor} < 0.05$

El test basado en el estadístico DSP rechaza la hipótesis de log-normalidad al 5% mientras que el basado en D no lo hace. Se realiza el gráfico PP para este ejemplo junto con las bandas de aceptación del 95% donde se puede apreciar que el primer punto de la muestra se encuentra fuera de la banda que corresponde al estadístico DSP .

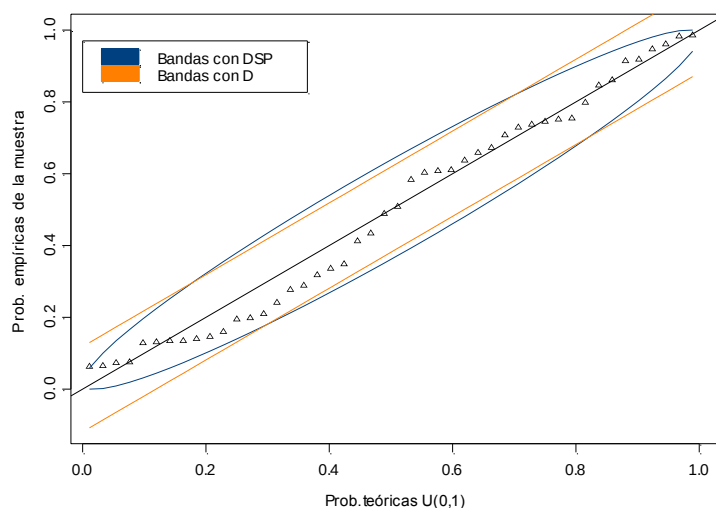


Figura 5.6. Gráfico PP correspondiente a la muestra completa de Brown y Miller de tamaño 46 para la variable NC con bandas de aceptación al 95%.

Espinosa et al. (2004) proponen para este ejemplo la distribución de Birnbaum-Saunders cuyos parámetros de escala y forma estiman y consideran que es la que mejor ajusta a los datos entre las distribuciones Gaussiana inversa, log-normal, gamma y Birnbaum-Saunders.

Espinosa et al. (2004) consideraron los primeros 37 datos de la muestra ordenada de NC con el objetivo de aplicar metodología de datos censurados. Es decir, consideraron una muestra censurada de tipo II a la derecha, con una proporción aproximada de observaciones completas del 80%. Realizaron un test para la hipótesis nula de que dicha muestra proviene de una distribución log-normal.

Los EMV y de Gupta de los parámetros se presentan en Tabla 5.9.4 tanto para la muestra completa como para la censurada.

Tabla 5.9.4

Tipo de muestra	Método	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Censurada	Máx. verosimilitud	6.28526400	0.9101688
Censurada	Gupta	6.28811700	0.9276903
Sin censura	Máx. verosimilitud	6.34054954	0.9915526
Sin censura	Gupta	6.33331090	0.9976853

En este caso no se contaba con percentiles para el tamaño de muestra considerado por lo que se estimaron los cuantiles para el caso particular de $N=46$ y 37 observaciones completas por simulación como en los otros casos. De esta forma no es necesario interpolar en Tablas A9, A10, A11 y A12 de Apéndice 1.

Se utilizaron las estimaciones lineales de los parámetros de la distribución normal con censura dadas por Gupta y también las estimaciones obtenidas por el método de máxima verosimilitud.

Se obtuvieron los valores que se indican en Tablas 5.9.5 - 5.9.6.

Tabla 5.9.5

Cuantiles Gupta	50%	75%	90%	95%	99%
${}_2D^*_{37,46}$	0.07814708	0.09141209	0.1060889	0.1155532	0.1335822
${}_2DSP^*_{37,46}$	0.05144543	0.06150441	0.07238559	0.07963703	0.09554739

Tabla 5.9.6

Cuantiles EMV	50%	75%	90%	95%	99%
${}_2D^*_{37,46}$	0.0819794	0.09679987	0.1122327	0.1217304	0.1415898
${}_2DSP^*_{37,46}$	0.05317117	0.06309449	0.07329133	0.07992638	0.09443528

La aplicación de los tests produjo los resultados presentados en tabla 5.9.7.

Tabla 5.9.7

Método de estimación	Valor ${}_2D^*_{37,46}$	Valor ${}_2DSP^*_{37,46}$
Gupta	0.09395752	0.08806294
	0.1<p-valor<0.25	0.01<p-valor <0.05
EMV	0.09693664	0.08653764
	0.1<p-valor<0.25	0.01<p-valor <0.05

En este caso, se concluye en forma análoga a como se hizo en el caso de la muestra completa, esto es, con el test basado en el estadístico ${}_2D^*_{37,46}$ no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula mientras que con el basado en el estadístico ${}_2DSP^*_{37,46}$ resulta significativo con $0.01<p\text{-valor}<0.05$.

Lo observado por los autores Espinosa et al. (2004) resulta consistente con los resultados aquí obtenidos utilizando el test basado en ${}_2DSP^*_{37,46}$.

A continuación se incluyen los gráficos *PP*, *DSP* y *QQ* de la muestra de tamaño 46 considerada inicialmente pero con sólo 37 observaciones completas, con bandas de aceptación al 95 % para visualizar los resultados obtenidos, empleando estimación de máxima verosimilitud

de los parámetros. En los tres gráficos se puede visualizar un punto fuera de la banda correspondiente al test basado en ${}_2DSP^*_{37,46}$.

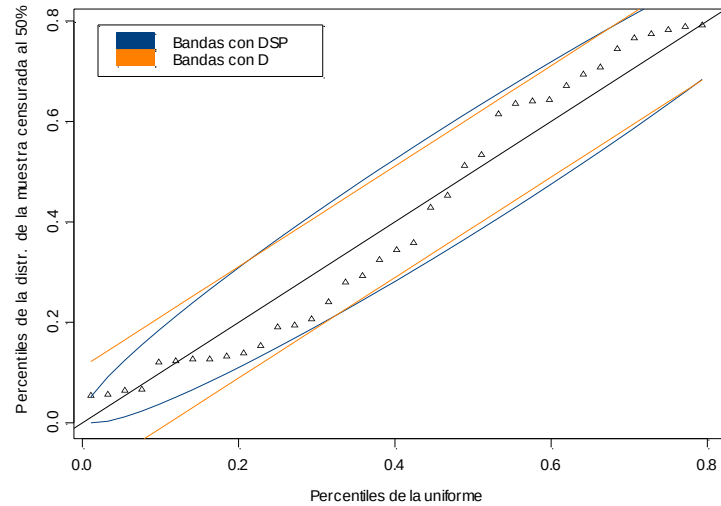


Figura 5.7. Gráfico PP de la muestra de Brown y Miller de tamaño 46, con 37 observaciones completas de la variable *NC* con bandas de aceptación del 95 %.

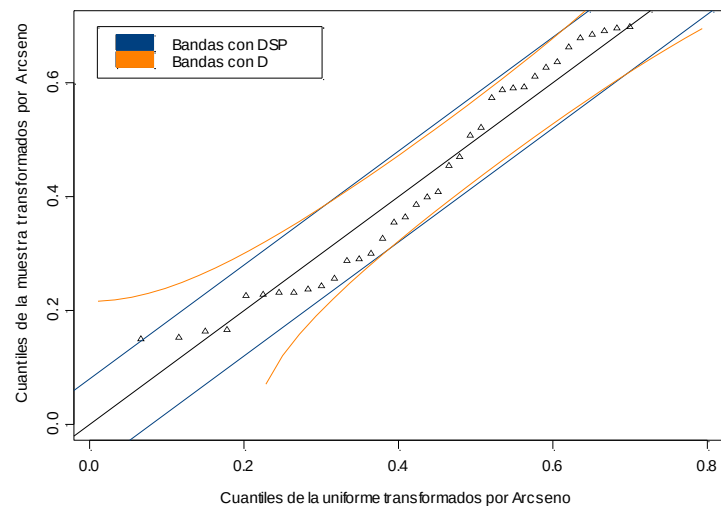


Figura 5.8. Gráfico DSP de la muestra de Brown y Miller de tamaño 46, con 37 observaciones completas de la variable *NC* con bandas de aceptación del 95 %.

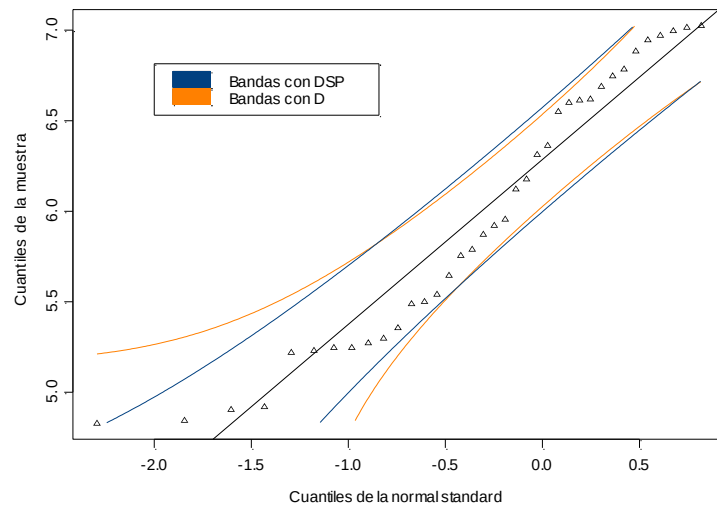


Figura 5.8 Gráfico QQ de la muestra de Brown y Miller de tamaño 46, con 37 observaciones completas de la variable *NC* con bandas de aceptación del 95 %.

Conclusiones y futuras investigaciones

En el presente trabajo se propusieron nuevos tests de bondad de ajuste basados en la distribución empírica y en estadísticos del tipo de Kolmogorov-Smirnov para el caso de muestras con censura simple de tipo I y de tipo II. Se trata de tests basados en estadísticos que son sencillos de calcular y que resultaron más potentes en la detección de hipótesis alternativas que otros tests de tipo cuadrático.

Se consideró bajo la hipótesis nula una distribución completamente especificada y luego el caso de una distribución normal con parámetros desconocidos. En este último caso, se discutió la estimación de los parámetros de la distribución bajo H_0 para muestras con censura y luego se estudiaron los problemas numéricos que surgen en el proceso de hallarlas.

Luego, se derivaron los estimadores de máxima verosimilitud y también los de Gupta para muestras con censura simple de una distribución normal.

Se desarrollaron programas que, para cualquier tamaño de muestra y número de observaciones completas, encuentran estos estimadores en los casos mencionados.

Los tests propuestos también tienen la ventaja de poder presentarse gráficamente mediante bandas de confianza, lo que provee la posibilidad de determinar la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula. Para este efecto se encontraron bandas de confianza para los gráficos *QQ*, *DSP* y *PP*, las que permiten visualizar, cuándo se rechaza la hipótesis nula y cuáles son los datos que contribuyeron a esa decisión. Se elaboraron programas en S-plus para implementar los tests propuestos y para elaborar los gráficos con las respectivas bandas de aceptación.

Se estudiaron mediante el método de Monte Carlo las distribuciones de los estadísticos de los tests bajo la hipótesis nula y se hallaron tablas de percentiles de estas distribuciones.

También, se estimó y comparó la potencia de los tests mediante simulaciones de Monte Carlo y se presentaron diversos ejemplos como ilustración.

Los tests aquí propuestos resultan ser más sencillos que los de tipo cuadrático, ya que son test basados en generalizaciones de los estadísticos D y DSP , con la posibilidad de realizar además tests gráficos.

Se determinó la bondad de ajuste en algunas aplicaciones prácticas que en la literatura investigada se hallan poco desarrolladas. Por ejemplo, tests para muestras censuradas provenientes de una distribución normal de parámetros desconocidos basados en estadísticos del tipo cuadrático y estimaciones dadas por Gupta. Estos tests no son sencillos de implementar y no hay resultados comparativos sobre la eficiencia de los estimadores empleados. Los estudios de potencia sólo se obtuvieron para sólo una fracción de censura (0.6).

Se realizaron comparaciones de la eficiencia de los distintos estimadores y de la potencia de los tests. Esto abre camino a futuras investigaciones tendientes a extender los tests que se han propuesto y desarrollado aquí para la familia normal a otras familias de distribuciones, como la gamma o distribuciones de Birnbaum-Saunders o más generalmente a familias de distribuciones simétricas o skew-simétricas.

También es posible extender lo aquí propuesto a otros tipos de censura, como por ejemplo: censura doble y progresiva.

Apéndice 1

A continuación se incluyen las tablas que contienen los percentiles de la distribución de los estadísticos bajo la hipótesis nula de los tests que se han estudiado en distintas secciones del trabajo.

Se incluyen todas las tablas necesarias en el trabajo para que no resulte necesario recurrir a una bibliografía específica adicional.

Se observa que los valores de los percentiles para DSP resultan menores que los correspondientes para D , esto vale para las distribuciones de estadísticos basados en D y DSP que se han visto en el presente trabajo.

Tablas:

- **A1** Percentiles de la distribución del estadístico D , para el test del capítulo 2 sección 2.3.
- **A2** Percentiles de la distribución del estadístico DSP , para el test del capítulo 2 la sección 2.5.
- **A3** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_1D_{T,N}$ para una muestra censurada tipo I de una distribución completamente especificada.
- **A4** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2D_{n,N}$ para una muestra censurada tipo II de una distribución completamente especificada.
- **A5** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_1DSP_{T,N}$ para una muestra censurada tipo I de una distribución completamente especificada.
- **A6** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2DSP_{n,N}$ para una muestra censurada tipo II de una distribución completamente especificada.
- **A7** Percentiles de la distribución del estadístico D para una muestra completa de una distribución normal de parámetros desconocidos, capítulo 4 sección 4.2.

- **A8** Percentiles de la distribución del estadístico DSP para una muestra completa de una distribución normal de parámetros desconocidos, capítulo 4 sección 4.2.
- **A9** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2D_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimados por máxima verosimilitud.
- **A10** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2DSP_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimados por máxima verosimilitud.
- **A11** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2D_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimados por Gupta.
- **A12** Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2DSP_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimados por Gupta.

Nota: En el caso de censura de tipo I las Tablas **A3** y **A5** se entran con $p=T$ para todo valor N de tamaño de muestra.

En el caso de censura de tipo II, las Tablas **A4**, **A6**, **A9**, **A10**, **A11**

y **A12** se consultan con $p=\frac{n}{N}$ siendo n el número de observaciones

completas y N el tamaño de la muestra.

Tabla A1. Percentiles de la distribución del estadístico D

N	D.50%	D.75%	D.90%	D.95%	D.99%
10	0.24586330	0.30533430	0.3674246	0.4096449	0.4881644
12	0.22703150	0.27989410	0.3387385	0.3749092	0.4489967
14	0.20992810	0.26093890	0.3131315	0.3511092	0.4129037
15	0.20350400	0.2525964	0.3054141	0.3398628	0.406912
16	0.19596530	0.24540850	0.2944951	0.3278105	0.3871106
18	0.18600900	0.22992090	0.2766795	0.3078022	0.3653446
20	0.17708350	0.21985260	0.2656068	0.2958260	0.3566635
22	0.16937190	0.20870880	0.2524124	0.2822409	0.3388574
24	0.16349780	0.20124480	0.2413176	0.2691961	0.3281374
26	0.15609580	0.19310260	0.2308479	0.2570451	0.3137425
28	0.15045680	0.18685290	0.2250141	0.2491276	0.2995124
30	0.14619760	0.18062330	0.2171016	0.2431628	0.2909020
32	0.14169190	0.17407710	0.2091914	0.2325273	0.2837743
34	0.13716260	0.17011380	0.2041908	0.2283651	0.2715301
36	0.13369000	0.16486500	0.1983797	0.2204025	0.2631560
38	0.12984010	0.16141820	0.1937749	0.2171730	0.2611746
40	0.12667260	0.15639610	0.1900311	0.2109794	0.2496440
42	0.12469460	0.15382370	0.1851014	0.2045667	0.2457514
44	0.12076710	0.14944870	0.1808439	0.2014620	0.2406221
46	0.11815760	0.14593610	0.1770964	0.1952794	0.2323349
48	0.11570100	0.14311340	0.1720400	0.1915253	0.2306672
50	0.11376430	0.14122290	0.1700930	0.1894472	0.2273008
52	0.11156570	0.13782500	0.1651092	0.1843017	0.2195816
54	0.11003320	0.13627560	0.1633153	0.1820544	0.2195716
56	0.10813520	0.13352220	0.1606095	0.1792702	0.2134662
58	0.10492340	0.13049460	0.1564967	0.1747986	0.2100495
60	0.10470100	0.12980750	0.1556298	0.1720215	0.2052133
62	0.10231930	0.12637500	0.1515835	0.1676609	0.2007975
64	0.10142300	0.12512290	0.1503861	0.1653556	0.1991735
66	0.09903632	0.12236610	0.1473812	0.1647681	0.1972070
68	0.09790106	0.12093780	0.1451037	0.1609809	0.1927636
70	0.09680960	0.11929930	0.1431864	0.1581770	0.1920688
72	0.09510486	0.11750610	0.1421821	0.1589869	0.1927721
74	0.09396582	0.11693320	0.1420179	0.1567226	0.1880416
76	0.09256562	0.11445630	0.1374085	0.1534480	0.1812349
78	0.09100362	0.11264690	0.1356059	0.1507135	0.1786647
80	0.09052108	0.11242560	0.1353872	0.1509423	0.1807331
82	0.08971301	0.11092430	0.1339252	0.1485346	0.1794768
84	0.08825912	0.10887350	0.1300180	0.1442913	0.1715717
86	0.08775558	0.10799800	0.1291383	0.1438729	0.1737741
88	0.08691651	0.10726180	0.1299016	0.1443836	0.1741213
90	0.08543291	0.10552150	0.1259511	0.1400545	0.1690385
92	0.08432786	0.10452840	0.1257773	0.1402125	0.1678127
94	0.08452972	0.10332470	0.1242350	0.1383250	0.1649707
96	0.08310124	0.10253070	0.1237371	0.1370261	0.1649822
98	0.08192729	0.10092120	0.1210945	0.1353847	0.1611420
100	0.08061961	0.09939466	0.1199957	0.1339189	0.1595261

Tabla A2. Percentiles de la distribución del estadístico *DSP*

N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
10	0.15038290	0.19057540	0.23178680	0.25883580	0.3151319
12	0.14233700	0.17980870	0.21800340	0.24237590	0.2951355
14	0.13663840	0.17063110	0.20752320	0.23007740	0.2761328
15	0.13266040	0.16557870	0.20078920	0.22557060	0.2749181
16	0.13050050	0.16246210	0.19529010	0.21678720	0.2610966
18	0.12505640	0.15545920	0.18708170	0.20665830	0.2472770
20	0.12107280	0.15029020	0.18031500	0.20141820	0.2417816
22	0.11653220	0.14347080	0.17191210	0.19086130	0.2338949
24	0.11368480	0.13883360	0.16588080	0.18515050	0.2242325
26	0.10953970	0.13428460	0.15960990	0.17849230	0.2121426
28	0.10677940	0.13134870	0.15609350	0.17279260	0.2054750
30	0.10462200	0.12625910	0.15139060	0.16783020	0.2025978
32	0.10177600	0.12381290	0.14690460	0.16287430	0.1942917
34	0.09921099	0.12065250	0.14505190	0.15899370	0.1894458
36	0.09727545	0.11817300	0.13959870	0.15512340	0.1849095
38	0.09501881	0.11552660	0.13801340	0.15333500	0.1817410
40	0.09287351	0.11353760	0.13498310	0.14884030	0.1750953
42	0.09180124	0.11167990	0.13224570	0.14525910	0.1742805
44	0.08944673	0.10851400	0.12906540	0.14244440	0.1672981
46	0.08734047	0.10628620	0.12576550	0.13892570	0.1633012
48	0.08603396	0.10389420	0.12324850	0.13610990	0.1611775
50	0.08538476	0.10335670	0.12299710	0.13441620	0.1605192
52	0.08419680	0.10148400	0.12041830	0.13287010	0.1569781
54	0.08273512	0.09983405	0.11841580	0.13026280	0.1540369
56	0.08168426	0.09846867	0.11602020	0.12774020	0.1554294
58	0.07975730	0.09606805	0.11420120	0.12651890	0.1483959
60	0.07932085	0.09565321	0.11269110	0.12455230	0.1489892
62	0.07776344	0.09350457	0.11075890	0.12185070	0.1448127
64	0.07690219	0.09276001	0.10871130	0.12071920	0.1430955
66	0.07620116	0.09146360	0.10753260	0.11824770	0.1405823
68	0.07504509	0.09065962	0.10610220	0.11717300	0.1383847
70	0.07420969	0.08891897	0.10467790	0.11586000	0.1388017
72	0.07320188	0.08839769	0.10409040	0.11505210	0.1361079
74	0.07260153	0.08741750	0.10242950	0.11312450	0.1346657
76	0.07186408	0.08616329	0.10121230	0.11107950	0.1310578
78	0.07046464	0.08476894	0.10019080	0.11053270	0.1293591
80	0.07019656	0.08482091	0.09943559	0.10913320	0.1288904
82	0.06978112	0.08365496	0.09813388	0.10852300	0.1291551
84	0.06878065	0.08178068	0.09578509	0.10474540	0.1252734
86	0.06843142	0.08190855	0.09597495	0.10480220	0.1241626
88	0.06773094	0.08102915	0.09535839	0.10524680	0.1236377
90	0.06673336	0.07972451	0.09360119	0.10266890	0.1216270
92	0.06608060	0.07929553	0.09301393	0.10184590	0.1204624
94	0.06578508	0.07864131	0.09203947	0.10072180	0.1192259
96	0.06509452	0.07808569	0.09124376	0.09995683	0.1203435
98	0.06432244	0.07705911	0.09041350	0.09879240	0.1175020
100	0.06392756	0.07627401	0.08987518	0.09815909	0.1168701

Tabla A3. Percentiles de la distribución del estadístico ${}_1D_{T,N}$ para una muestra censurada tipo I de una distribución completamente especificada.

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.1	10	0.10000000	0.10244380	0.13361710	0.15994260	0.21067210	0.23706850	0.30585910
	15	0.08571539	0.10000000	0.11427580	0.13048320	0.17300210	0.19326170	0.23679200
	20	0.07087654	0.10000000	0.10366150	0.11696740	0.14386730	0.16697780	0.20249930
	25	0.06131742	0.08705208	0.10000000	0.10522330	0.12661490	0.14979330	0.18067970
	30	0.06153402	0.07791757	0.09624842	0.10000000	0.11405370	0.13613630	0.15390220
	35	0.05507735	0.07146544	0.08492864	0.09688686	0.10723370	0.12529790	0.14649280
	40	0.05031872	0.07197199	0.07880030	0.08823646	0.10161530	0.11583530	0.13820720
	45	0.04990933	0.06559162	0.07777778	0.08275515	0.09856426	0.10764480	0.12744740
	50	0.04670401	0.06168184	0.07396944	0.08000000	0.09342462	0.10433200	0.12416820
	55	0.04545455	0.06087363	0.06898425	0.07871658	0.08734530	0.10023160	0.11734500
	60	0.04310380	0.05738652	0.06666667	0.07350381	0.08493068	0.09793211	0.11001020
	65	0.04111390	0.05459960	0.06463304	0.07018053	0.08209512	0.09255127	0.10721600
	70	0.04041086	0.05403241	0.06153915	0.06955445	0.07800011	0.08728437	0.10036490
	75	0.03836833	0.05095350	0.06000000	0.06518869	0.07541167	0.08630716	0.09746673
	80	0.03750000	0.05000000	0.05847710	0.06346317	0.07500000	0.08441792	0.09615226
	85	0.03661944	0.04979612	0.05677203	0.06351767	0.07194690	0.07946150	0.09036619
	90	0.03503947	0.04702524	0.05555556	0.06018209	0.06813832	0.07777770	0.08850780
	95	0.03500079	0.04697005	0.05420176	0.05902505	0.06842105	0.07720726	0.08778904
	100	0.03387597	0.04562430	0.05231676	0.05866440	0.06735795	0.07461977	0.08513798

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.2	10	0.13747720	0.20000000	0.20000000	0.22266830	0.26808790	0.31785590	0.36656290
	15	0.12015100	0.15171740	0.18025680	0.20000000	0.22271260	0.26131630	0.29427430
	20	0.10000000	0.13642540	0.15314750	0.16996720	0.20000000	0.22078020	0.25697230
	25	0.09072587	0.12000000	0.14092730	0.15910490	0.17596490	0.20055310	0.22625160
	30	0.08380924	0.11041900	0.13082850	0.13891880	0.16281110	0.17610960	0.20520550
	35	0.07958509	0.10499000	0.11909890	0.13187240	0.14954980	0.17070840	0.19019120
	40	0.07457774	0.09884919	0.11279790	0.12500000	0.14041830	0.15681460	0.17710490
	45	0.06902520	0.09207075	0.10790270	0.11659430	0.13392490	0.15128490	0.17352470
	50	0.06564525	0.08722555	0.10063020	0.11140500	0.12654260	0.14267300	0.16147690
	55	0.06307821	0.08335348	0.09549258	0.10635040	0.11944820	0.13311960	0.15242630
	60	0.06103805	0.08080935	0.09234773	0.10097960	0.11666670	0.13023270	0.14691210
	65	0.05871832	0.07692308	0.09066413	0.09793672	0.11048760	0.12308100	0.13866870
	70	0.05714286	0.07466201	0.08571429	0.09576404	0.10839010	0.12028340	0.13418230
	75	0.05453608	0.07234139	0.08358240	0.09328390	0.10587950	0.11884210	0.13317020
	80	0.05268506	0.06973065	0.07993566	0.08750000	0.10000000	0.11250000	0.12505070
	85	0.05137813	0.06847082	0.07837546	0.08594779	0.09699798	0.10822480	0.12181840
	90	0.04974475	0.06652807	0.07652557	0.08339990	0.09488458	0.10598590	0.12047870
	95	0.04854793	0.06447021	0.07402112	0.08210930	0.09458352	0.10534770	0.11680960
	100	0.04781330	0.06262714	0.07197630	0.07932020	0.09000000	0.10000140	0.11208860

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.3	10	0.17471260	0.21987100	0.26022980	0.29587030	0.31715070	0.35765040	0.41175930
	15	0.14199510	0.18340420	0.21514920	0.23333330	0.26495260	0.30000000	0.33606640
	20	0.12362870	0.16081560	0.18855510	0.20194330	0.23129760	0.25459740	0.28866310
	25	0.11019940	0.14380220	0.16831200	0.18100040	0.21013580	0.23259960	0.26417840
	30	0.10121250	0.13361310	0.15578360	0.16929930	0.19373240	0.21183250	0.23733120
	35	0.09587382	0.12553680	0.14227480	0.15714290	0.17987990	0.19921070	0.22054560
	40	0.08889612	0.11651990	0.13344680	0.14737710	0.16581040	0.18284560	0.20486820
	45	0.08388013	0.11064310	0.12700460	0.13962540	0.15662770	0.17222910	0.19310460
	50	0.08000000	0.10472910	0.12017260	0.13214150	0.15003070	0.16579690	0.18344510
	55	0.07703180	0.10023730	0.11621790	0.12640080	0.14312570	0.15681320	0.17585560
	60	0.07357777	0.09757878	0.11087340	0.12172260	0.13701740	0.15102370	0.17078050
	65	0.07054910	0.09251227	0.10516820	0.11512750	0.13076920	0.14593320	0.16417630
	70	0.06835067	0.08891148	0.10247250	0.11388320	0.12857140	0.14286220	0.16093580
	75	0.06589328	0.08666667	0.09937936	0.10835440	0.12285730	0.13858920	0.15584060
	80	0.06293342	0.08274412	0.09524321	0.10398350	0.11917950	0.13029840	0.14626400
	85	0.06220986	0.08064551	0.09293257	0.10113650	0.11594830	0.13034790	0.14560930
	90	0.05968047	0.07920381	0.09054542	0.09975962	0.11223400	0.12440910	0.13904880
	95	0.05844690	0.07693534	0.08883432	0.09677068	0.11028770	0.12105260	0.13326060
	100	0.05804795	0.07555712	0.08675885	0.09463461	0.10704670	0.11886810	0.13375360

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.4	10	0.20000000	0.24999220	0.29568010	0.30969380	0.35540710	0.40000000	0.43898840
	15	0.15934820	0.20546750	0.23931670	0.26629210	0.29373910	0.33333330	0.36791420
	20	0.14210410	0.18443450	0.20865570	0.22799000	0.25602450	0.28476600	0.31571100
	25	0.12501580	0.16266440	0.18977780	0.20529150	0.23600740	0.25715540	0.28410200
	30	0.11538440	0.15035170	0.17203590	0.18823560	0.21155940	0.23355220	0.26467980
	35	0.10865660	0.14021800	0.16083350	0.17455990	0.19892300	0.21850050	0.24361810
	40	0.10008090	0.13077210	0.15000000	0.16353910	0.18464240	0.20463910	0.23140600
	45	0.09470749	0.12282270	0.13993260	0.15465930	0.17299020	0.18989350	0.21117910
	50	0.09029949	0.11695410	0.13377020	0.14491380	0.16463040	0.18371850	0.20368060
	55	0.08679800	0.11224740	0.12863670	0.14151930	0.16199960	0.17839270	0.19565520
	60	0.08326499	0.10711860	0.12372180	0.13478870	0.15234430	0.16910560	0.18827010
	65	0.07955989	0.10420100	0.11863830	0.12834110	0.14490600	0.15917780	0.17706330
	70	0.07692751	0.10000000	0.11372610	0.12422080	0.13991800	0.15453770	0.17122150
	75	0.07393620	0.09544544	0.10931050	0.12000000	0.13526240	0.14854770	0.16563190
	80	0.07231090	0.09336489	0.10597170	0.11630530	0.13103380	0.14604070	0.16417470
	85	0.07017042	0.09015815	0.10309180	0.11205740	0.12757810	0.13992550	0.15474650
	90	0.06795227	0.08813749	0.10080040	0.11045430	0.12364620	0.13545970	0.15184050
	95	0.06603024	0.08588896	0.09824702	0.10687270	0.12050220	0.13354820	0.14711060
	100	0.06500701	0.08435709	0.09604506	0.10425800	0.11861600	0.13138060	0.14573490

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.5	10	0.20931160	0.27599750	0.30847280	0.33907180	0.38717660	0.41901650	0.46769910
	15	0.17483300	0.23011360	0.25596020	0.28007640	0.31196100	0.34267060	0.38167050
	20	0.15208690	0.19930160	0.22338360	0.24597460	0.27482670	0.30000000	0.33305450
	25	0.13924150	0.17960850	0.20257940	0.22000000	0.24570560	0.27125600	0.30098800
	30	0.12632930	0.16270360	0.18427630	0.20000000	0.22658040	0.24650150	0.27630820
	35	0.11642040	0.15024050	0.17028090	0.18610170	0.21059200	0.23184800	0.25695440
	40	0.10962930	0.14200890	0.16051630	0.17500000	0.19703880	0.21586880	0.24128450
	45	0.10421510	0.13412360	0.15301390	0.16666670	0.18686950	0.20582610	0.22780520
	50	0.09842988	0.12629900	0.14371700	0.15737740	0.17502320	0.19392890	0.21423330
	55	0.09442616	0.11928950	0.13636360	0.14892390	0.16801820	0.18482850	0.20593220
	60	0.09094875	0.11696020	0.13333330	0.14459780	0.16173090	0.17786620	0.19783760
	65	0.08601003	0.11153280	0.12653590	0.13658000	0.15265280	0.16874830	0.18846310
	70	0.08373941	0.10735810	0.12243660	0.13255910	0.14934010	0.16453410	0.18156320
	75	0.08100092	0.10374510	0.11709510	0.12785220	0.14325210	0.15825040	0.17311320
	80	0.07893059	0.10106680	0.11484080	0.12517000	0.14086040	0.15510480	0.17041560
	85	0.07647059	0.09814317	0.11083910	0.11993810	0.13466840	0.14908650	0.16412600
	90	0.07462609	0.09518160	0.10801770	0.11852090	0.13213540	0.14444440	0.16048410
	95	0.07193733	0.09270392	0.10491470	0.11399490	0.12785910	0.14210530	0.15685590
	100	0.07066932	0.09023600	0.10294720	0.11201140	0.12753170	0.13979270	0.15512720

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.6	10	0.22462770	0.29239740	0.32584930	0.35626030	0.40000000	0.42988290	0.47953570
	15	0.18999470	0.24088570	0.27120410	0.29432510	0.33152120	0.35663170	0.39575850
	20	0.16311510	0.20716520	0.23470170	0.25360070	0.28568790	0.31190340	0.34511840
	25	0.14638250	0.18690600	0.21049800	0.22820240	0.25586050	0.28046090	0.31183870
	30	0.13431020	0.16963640	0.19212090	0.20764790	0.23274450	0.25656460	0.28249300
	35	0.12449090	0.15808340	0.17786690	0.19332590	0.21696430	0.23958560	0.26464930
	40	0.11770670	0.15000000	0.16949290	0.18257880	0.20493440	0.22301680	0.24770370
	45	0.11099980	0.13955790	0.15767760	0.17150760	0.19061320	0.20956490	0.22899020
	50	0.10448260	0.13316220	0.15117790	0.16403700	0.18313640	0.20000520	0.21935690
	55	0.09935537	0.12727270	0.14386680	0.15560030	0.17331130	0.18863560	0.20656850
	60	0.09577096	0.12142180	0.13768000	0.14844700	0.16545310	0.18133620	0.20000000
	65	0.09234643	0.11711320	0.13289930	0.14526760	0.16233370	0.17766410	0.19667430
	70	0.08912286	0.11239900	0.12686890	0.13735420	0.15373000	0.16851160	0.18541010
	75	0.08652566	0.10967750	0.12412190	0.13401310	0.15045060	0.16544020	0.18131910
	80	0.08363147	0.10650340	0.12088190	0.13038160	0.14524810	0.15968770	0.17535030
	85	0.08100343	0.10313660	0.11629680	0.12567060	0.14183470	0.15453020	0.17009810
	90	0.07869062	0.10000000	0.11325910	0.12255630	0.13843120	0.15256300	0.16866420
	95	0.07632377	0.09670993	0.11049120	0.11981210	0.13406850	0.14787830	0.16484180
	100	0.07523585	0.09567457	0.10827450	0.11748500	0.13173530	0.14447930	0.15842260

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.7	10	0.23804080	0.30000000	0.33605720	0.36387750	0.40106680	0.43896560	0.48078450
	15	0.19552700	0.24639420	0.27915640	0.30000000	0.33389820	0.36666670	0.40276310
	20	0.17029800	0.21498880	0.24234850	0.26151540	0.29222560	0.31658040	0.34734230
	25	0.15341170	0.19114450	0.21447020	0.23246720	0.26000000	0.28742570	0.31432140
	30	0.13972190	0.17608910	0.19853920	0.21442410	0.24028320	0.26281300	0.28922950
	35	0.12947690	0.16380740	0.18532800	0.20018500	0.22221900	0.24301400	0.26577970
	40	0.12184020	0.15334740	0.17294340	0.18673210	0.20857310	0.22718600	0.25023090
	45	0.11455940	0.14355340	0.16100890	0.17361000	0.19238320	0.21090910	0.23176860
	50	0.10981380	0.13835060	0.15531920	0.16697100	0.18518290	0.20145100	0.22056440
	55	0.10426530	0.13064580	0.14692660	0.15805670	0.17583700	0.19451400	0.21324750
	60	0.10000000	0.12556390	0.14142520	0.15297670	0.17048720	0.18722080	0.20563230
	65	0.09629521	0.12060490	0.13571860	0.14615380	0.16388630	0.17979130	0.19761040
	70	0.09265961	0.11687850	0.13219000	0.14252440	0.15850960	0.17262480	0.19035840
	75	0.09001060	0.11287670	0.12679510	0.13696050	0.15227700	0.16624050	0.18204210
	80	0.08751638	0.11006570	0.12378460	0.13323340	0.14904810	0.16324750	0.17937220
	85	0.08424930	0.10530170	0.11874520	0.12802850	0.14267550	0.15655390	0.17138950
	90	0.08258620	0.10326920	0.11637920	0.12497360	0.13859980	0.15169930	0.16806560
	95	0.08014405	0.10029890	0.11309690	0.12215720	0.13662600	0.14898070	0.16330580
	100	0.07838549	0.09787572	0.11000000	0.11855800	0.13323340	0.14525180	0.16122900

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.8	10	0.24430040	0.30250770	0.34103500	0.36759350	0.40506220	0.44501580	0.48777470
	15	0.20018910	0.25065720	0.28123240	0.30320520	0.33624090	0.36420190	0.39815530
	20	0.17582020	0.21879350	0.24750620	0.26695800	0.29423860	0.31957390	0.35586290
	25	0.15754130	0.19545530	0.21994250	0.23719680	0.26478050	0.28837550	0.31894420
	30	0.14370830	0.17946330	0.20096550	0.21672140	0.23955050	0.26117870	0.28682130
	35	0.13349220	0.16618130	0.18604570	0.20049330	0.22332320	0.24295870	0.26801070
	40	0.12500000	0.15515510	0.17433130	0.18860270	0.20968480	0.22725270	0.25043710
	45	0.11808020	0.14730350	0.16450740	0.17777780	0.19790020	0.21545670	0.23636660
	50	0.11306840	0.14047720	0.15764870	0.16968400	0.18884840	0.20628310	0.22640990
	55	0.10762580	0.13272090	0.14798370	0.16015750	0.17843470	0.19505770	0.21390970
	60	0.10320190	0.12866380	0.14447190	0.15549460	0.17259660	0.18848150	0.20513000
	65	0.09887898	0.12305330	0.13780310	0.14783430	0.16606710	0.18190240	0.19844100
	70	0.09495490	0.11857110	0.13277330	0.14255530	0.15890920	0.17495820	0.19409280
	75	0.09272189	0.11517320	0.12924950	0.13823700	0.15393570	0.16706640	0.18428180
	80	0.08980262	0.11142070	0.12445370	0.13433330	0.14922860	0.16206470	0.17967480
	85	0.08714710	0.10849010	0.12105510	0.12995300	0.14528680	0.15905910	0.17241800
	90	0.08454934	0.10565150	0.11710810	0.12613190	0.13983570	0.15324640	0.16820170
	95	0.08250541	0.10282790	0.11471700	0.12283450	0.13571290	0.14799500	0.16142880
	100	0.08033811	0.10000260	0.11143290	0.11980400	0.13312660	0.14607260	0.15972940

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.9	10	0.24625100	0.30557330	0.34076340	0.36619700	0.40450520	0.44345100	0.48750470
	15	0.20352850	0.25245070	0.28243190	0.30402050	0.33766370	0.36776590	0.40573190
	20	0.17746790	0.21884930	0.24490590	0.26445080	0.29447370	0.32120710	0.35754470
	25	0.15881870	0.19651850	0.22000000	0.23619600	0.26186440	0.28545490	0.31183590
	30	0.14533630	0.18001900	0.20262880	0.21889030	0.24313260	0.26603980	0.28999420
	35	0.13391590	0.16660860	0.18748310	0.20206030	0.22474860	0.24687220	0.27197310
	40	0.12630310	0.15623690	0.17463120	0.18790310	0.20849910	0.22900680	0.25030830
	45	0.11995730	0.14864070	0.16602590	0.17871830	0.19850400	0.21742910	0.23899630
	50	0.11387090	0.14110490	0.15823020	0.16997510	0.19055650	0.20775150	0.22835100
	55	0.10771120	0.13374770	0.14976420	0.16133790	0.17883910	0.19407530	0.21223940
	60	0.10433010	0.12954160	0.14578860	0.15696690	0.17527530	0.19103220	0.20731310
	65	0.10024870	0.12388020	0.13804620	0.14960320	0.16625450	0.18157470	0.19843100
	70	0.09673507	0.11892830	0.13321190	0.14381990	0.16009380	0.17501460	0.19105140
	75	0.09343392	0.11473690	0.12840470	0.13802730	0.15367460	0.16778640	0.18482860
	80	0.09079419	0.11267090	0.12586200	0.13557590	0.15179170	0.16461380	0.17975000
	85	0.08773816	0.10859600	0.12203900	0.13106420	0.14519090	0.16064590	0.17542640
	90	0.08537528	0.10524060	0.11763710	0.12657080	0.14098610	0.15338060	0.17046290
	95	0.08362062	0.10343700	0.11521810	0.12419640	0.13818260	0.15059130	0.16657270
	100	0.08100894	0.10026110	0.11266540	0.12133410	0.13447160	0.14599820	0.15743490

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
1	10	0.24821430	0.30800630	0.34512990	0.37231830	0.41050880	0.44591730	0.49202610
	15	0.20120610	0.24918600	0.27951310	0.30112060	0.33594560	0.36809860	0.40529390
	20	0.17718830	0.22015280	0.24453000	0.26439030	0.29340290	0.32193630	0.35457470
	25	0.15891440	0.19783660	0.22190600	0.23834160	0.26476160	0.28846320	0.32028740
	30	0.14582550	0.17990980	0.20175690	0.21732500	0.24167110	0.26534070	0.29362540
	35	0.13586300	0.16810890	0.18863340	0.20298020	0.22464700	0.24475060	0.26577340
	40	0.12777830	0.15747990	0.17619590	0.18954280	0.21076780	0.23097260	0.25256040
	45	0.11981620	0.14809870	0.16607480	0.17918710	0.19806460	0.21710400	0.23997830
	50	0.11444080	0.14199450	0.15832240	0.17051490	0.18782810	0.20289840	0.22412580
	55	0.10799420	0.13477320	0.15143190	0.16280030	0.18019940	0.19652080	0.21556130
	60	0.10401390	0.12826000	0.14322600	0.15398190	0.171114070	0.18710650	0.20691770
	65	0.10067250	0.12427240	0.13974060	0.15042590	0.16610020	0.18068500	0.19666380
	70	0.09665276	0.11894870	0.13343590	0.14393060	0.15980150	0.17506670	0.19312940
	75	0.09361313	0.11492840	0.12903480	0.13864410	0.15462790	0.16893780	0.18555420
	80	0.08976267	0.11141720	0.12453300	0.13410560	0.15099280	0.16376190	0.17917810
	85	0.08787638	0.10897600	0.12208660	0.13159730	0.14557530	0.15877260	0.17310360
	90	0.08581609	0.10607760	0.11891050	0.12736920	0.14195270	0.15565380	0.16849440
	95	0.08387591	0.10315750	0.11505710	0.12364740	0.13752510	0.15096660	0.16685530
	100	0.08177004	0.10089520	0.11257130	0.12062610	0.13437460	0.14682080	0.16284210

Tabla A4. Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2D_{n,N}$ para una muestra censurada tipo II de una distribución completamente especificada.

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.1	10	0.08870528	0.12981480	0.17356590	0.20230640	0.25824840	0.30750270	0.36732290
	15	0.05952756	0.08651394	0.11783970	0.13981800	0.18265110	0.21762300	0.26762530
	20	0.06834661	0.09208269	0.11839130	0.14057300	0.17428470	0.20442240	0.24089400
	25	0.05517851	0.07539074	0.09748010	0.11389870	0.14322160	0.17117520	0.20226520
	30	0.05742813	0.07866263	0.09649055	0.11241270	0.13909590	0.16333770	0.19386940
	35	0.04954952	0.06815347	0.08408279	0.09860627	0.12152400	0.14273050	0.17307110
	40	0.05069519	0.06899427	0.08279978	0.09457629	0.11416730	0.13650360	0.15836090
	45	0.04480570	0.06098195	0.07351789	0.08410024	0.10466340	0.12413630	0.14536660
	50	0.04608401	0.06270077	0.07508986	0.08533326	0.10357110	0.11935460	0.14003260
	55	0.04175370	0.05656802	0.06702251	0.07670425	0.09367079	0.11116110	0.13108730
	60	0.04224582	0.05703000	0.06738752	0.07611742	0.09402963	0.11145420	0.13007570
	65	0.03927359	0.05304176	0.06314751	0.07100163	0.08587855	0.10034100	0.11747220
	70	0.03878551	0.05272914	0.06220445	0.06979658	0.08410574	0.09881184	0.11515630
	75	0.03658391	0.04931111	0.05779972	0.06504275	0.07790335	0.08974760	0.10662340
	80	0.03729682	0.05028684	0.05936763	0.06644865	0.07923390	0.09225736	0.10834820
	85	0.03497515	0.04696338	0.05505856	0.06161088	0.07431134	0.08665430	0.10321780
	90	0.03516537	0.04737884	0.05563067	0.06244280	0.07463624	0.08587254	0.10114530
	95	0.03338623	0.04447178	0.05259636	0.05921095	0.07005370	0.08250525	0.09712119
	100	0.03360999	0.04469025	0.05242232	0.05831988	0.06878890	0.08137188	0.09684030

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.2	10	0.13426740	0.17937490	0.22133010	0.25858500	0.31415400	0.35988980	0.41400030
	15	0.11165270	0.15107540	0.17911470	0.20443390	0.24769200	0.28605650	0.33213620
	20	0.09873458	0.13238870	0.15671020	0.17576130	0.21134310	0.24872670	0.28902800
	25	0.08999451	0.11978120	0.13967600	0.15739480	0.18879940	0.22201900	0.25771210
	30	0.08248814	0.11084610	0.12904200	0.14489810	0.17186430	0.19656410	0.23069740
	35	0.07753815	0.10264600	0.12001370	0.13315920	0.15700040	0.18101180	0.21023090
	40	0.07220833	0.09635126	0.11225670	0.12445620	0.14606230	0.16923090	0.19775790
	45	0.06846319	0.09090071	0.10657230	0.11849480	0.13928050	0.15927070	0.18806920
	50	0.06526826	0.08753266	0.10188400	0.11248820	0.13111720	0.14866230	0.17098430
	55	0.06250396	0.08291536	0.09621293	0.10644610	0.12356350	0.14167390	0.16845630
	60	0.06034077	0.07945662	0.09261672	0.10279130	0.11797800	0.13449010	0.15872720
	65	0.05785644	0.07652196	0.08940396	0.09830677	0.11413670	0.12729900	0.14632040
	70	0.05626353	0.07505430	0.08694757	0.09605855	0.11078490	0.12453150	0.14304000
	75	0.05433355	0.07216149	0.08358536	0.09270991	0.10688850	0.12164240	0.13696940
	80	0.05285146	0.06948118	0.08040601	0.08863064	0.10243640	0.11666480	0.13497760
	85	0.05119440	0.06815699	0.07853658	0.08661249	0.09946617	0.11296600	0.12990270
	90	0.04952039	0.06557300	0.07633782	0.08422665	0.09680378	0.10984870	0.12614300
	95	0.04827179	0.06418419	0.07463551	0.08271847	0.09477855	0.10684270	0.12413260
	100	0.04743986	0.06277869	0.07267450	0.07976013	0.09138459	0.10222840	0.11786240

p	N	D. 50.0%	D. 75.0%	D. 85.0%	D. 90.0%	D. 95.0%	D. 97.5%	D. 99.0%
0.3	10	0.16523490	0.21837120	0.25498190	0.28539110	0.33694750	0.38631050	0.44136540
	15	0.13055180	0.17287200	0.20252900	0.22607560	0.26735360	0.30487940	0.35161110
	20	0.12241910	0.16219690	0.18662460	0.20611950	0.24011260	0.27132040	0.31453430
	25	0.10607280	0.13972420	0.16316520	0.17973440	0.21054460	0.23921610	0.27203030
	30	0.10104500	0.13251420	0.15378870	0.16847650	0.19229590	0.21728180	0.24559110
	35	0.09195330	0.12096230	0.13959850	0.15357340	0.17665140	0.20031390	0.22909890
	40	0.08776163	0.11638350	0.13452910	0.14723570	0.16949700	0.18862620	0.21623460
	45	0.08221870	0.10830530	0.12551670	0.13864760	0.15796170	0.17815120	0.20044750
	50	0.07953878	0.10454770	0.12086840	0.13244370	0.15067370	0.16996660	0.19181610
	55	0.07466481	0.09829748	0.11340620	0.12481090	0.14260990	0.15932790	0.18048070
	60	0.07315008	0.09592507	0.11061110	0.12243350	0.13904160	0.15514720	0.17773850
	65	0.06923680	0.09084154	0.10319660	0.11315460	0.13008550	0.14564690	0.16706170
	70	0.06764198	0.08888605	0.10257550	0.11247750	0.12960440	0.14344760	0.16309240
	75	0.06478526	0.08569971	0.09822688	0.10761050	0.12300730	0.13866770	0.15675960
	80	0.06265386	0.08218413	0.09451011	0.10361980	0.11967270	0.13312610	0.15189970
	85	0.06100154	0.08007151	0.09264793	0.10191450	0.11716160	0.12925620	0.14654320
	90	0.05961205	0.07879880	0.09040812	0.09947060	0.11392710	0.12567430	0.14032110
	95	0.05815503	0.07632413	0.08828734	0.09655703	0.11017920	0.12238670	0.13741390
	100	0.05768862	0.07487155	0.08631030	0.09463461	0.10842760	0.12077290	0.13785280

p	N	D. 50.0%	D. 75.0%	D. 85.0%	D. 90.0%	D. 95.0%	D. 97.5%	D. 99.0%
0.4	10	0.18848990	0.24480050	0.28189110	0.30919980	0.35738300	0.40133420	0.45412150
	15	0.15709690	0.20476620	0.23718920	0.26187330	0.29651150	0.33272100	0.37441300
	20	0.13887280	0.17971770	0.20603530	0.22705370	0.25685920	0.28843690	0.32241740
	25	0.12475750	0.16236070	0.18696950	0.20397740	0.23220530	0.25984420	0.29054950
	30	0.11400560	0.14909770	0.17193080	0.18744650	0.21016310	0.23165450	0.26155160
	35	0.10719750	0.13891640	0.15887220	0.17365780	0.19716470	0.21812950	0.24746070
	40	0.10016020	0.13086520	0.15064650	0.16354840	0.18416780	0.20474150	0.22584790
	45	0.09429069	0.12245070	0.13931990	0.15252790	0.17195010	0.18983100	0.21025030
	50	0.08915861	0.11557890	0.13255700	0.14491940	0.16397060	0.18276370	0.20512920
	55	0.08576737	0.11141530	0.12802750	0.13984790	0.15742110	0.17632890	0.19917020
	60	0.08229507	0.10696470	0.12285270	0.13434010	0.15171820	0.16857410	0.18697990
	65	0.07921354	0.10282400	0.11718490	0.12717240	0.14491440	0.16140160	0.18167920
	70	0.07656892	0.09894187	0.11270870	0.12355730	0.13906200	0.15356650	0.17092750
	75	0.07337519	0.09523985	0.10916450	0.11945380	0.13531340	0.14956510	0.16634350
	80	0.07178964	0.09319496	0.10578260	0.11611170	0.13066000	0.14567110	0.16127870
	85	0.06961678	0.08978412	0.10248510	0.11162990	0.12709210	0.13988000	0.15596000
	90	0.06770959	0.08798049	0.10139710	0.11034750	0.12506020	0.13747350	0.15368550
	95	0.06576059	0.08542452	0.09723504	0.10534530	0.11949400	0.13342980	0.14730830
	100	0.06452470	0.08412266	0.09598073	0.10438190	0.11845570	0.13081410	0.14755250

	N	D. 50.0%	D. 75.0%	D. 85.0%	D. 90.0%	D. 95.0%	D. 97.5%	D. 99.0%
0.5	10	0.20721290	0.26574280	0.30292110	0.32999080	0.37178470	0.41349010	0.46192960
	15	0.16754400	0.21718850	0.24881300	0.27236340	0.30517560	0.33821060	0.37911760
	20	0.15061600	0.19449790	0.22116640	0.24081160	0.27006830	0.29538730	0.32724620
	25	0.13338370	0.17423270	0.19817300	0.21533060	0.24178090	0.26492760	0.29286520
	30	0.12461880	0.16018040	0.18313640	0.19855980	0.22382430	0.24550680	0.27238050
	35	0.11420270	0.14728420	0.16727510	0.18255370	0.20645800	0.22608470	0.25305690
	40	0.10877080	0.13986140	0.15899520	0.17243480	0.19362140	0.21500990	0.24223100
	45	0.10246740	0.13268030	0.15180330	0.16419640	0.18453710	0.20214750	0.22489640
	50	0.09779725	0.12588470	0.14374420	0.15575850	0.17347020	0.19141060	0.21187860
	55	0.09316011	0.11883060	0.13535030	0.14692080	0.16600200	0.18120390	0.20288270
	60	0.09037707	0.11643590	0.13202380	0.14278770	0.16026150	0.17577870	0.19570650
	65	0.08553993	0.11017860	0.12503090	0.13586730	0.15219790	0.16808940	0.18752850
	70	0.08328123	0.10683840	0.12184530	0.13166270	0.14802360	0.16185100	0.18064740
	75	0.08014153	0.10312480	0.11676520	0.12729610	0.14210020	0.15735180	0.17212400
	80	0.07858621	0.10122230	0.11475980	0.12463760	0.13963790	0.15446960	0.17130400
	85	0.07600706	0.09711437	0.10966920	0.11900710	0.13422390	0.14761070	0.16347620
	90	0.07427781	0.09470471	0.10766290	0.11767210	0.13107470	0.14316820	0.15989750
	95	0.07178327	0.09242404	0.10486900	0.11379850	0.12760740	0.14225480	0.15685590
	100	0.07067213	0.09026119	0.10255680	0.11165270	0.12703920	0.13958260	0.15451710

p	N	D. 50.0%	D. 75.0%	D. 85.0%	D. 90.0%	D. 95.0%	D. 97.5%	D. 99.0%
0.6	10	0.22220840	0.28204510	0.31891260	0.34481010	0.38400120	0.42179390	0.46424510
	15	0.18523200	0.23562610	0.26678410	0.28915060	0.32022890	0.34978180	0.38591330
	20	0.16201500	0.20405350	0.23108350	0.25018760	0.27936930	0.30532890	0.33831130
	25	0.14461430	0.18411440	0.20812700	0.22543340	0.25342870	0.27692910	0.30490630
	30	0.13407940	0.16875190	0.19046060	0.20622940	0.22957040	0.25296150	0.27896930
	35	0.12369310	0.15680260	0.17643700	0.19067350	0.21305120	0.23526890	0.25863950
	40	0.11638340	0.14833640	0.16729040	0.18110810	0.20393280	0.22161470	0.24405080
	45	0.10975730	0.13901950	0.15730280	0.16999000	0.19009580	0.20732330	0.22899020
	50	0.10408770	0.13264130	0.15040890	0.16339850	0.18248140	0.19846730	0.21691240
	55	0.09880273	0.12627190	0.14224720	0.15396670	0.17221810	0.18761900	0.20656850
	60	0.09558910	0.12091330	0.13693740	0.14781230	0.16526700	0.18038430	0.19686810
	65	0.09233474	0.11677580	0.13214520	0.14395690	0.16095650	0.17659230	0.19713640
	70	0.08870745	0.11179950	0.12642220	0.13683940	0.15268420	0.16716960	0.18408100
	75	0.08613585	0.10895160	0.12328530	0.13350790	0.15054900	0.16461960	0.18132570
	80	0.08363147	0.10595930	0.11941790	0.12945300	0.14461290	0.15874090	0.17401010
	85	0.08071397	0.10279820	0.11612570	0.12557380	0.14061680	0.15363000	0.16858570
	90	0.07856421	0.09947153	0.11243440	0.12140060	0.13711750	0.15116460	0.16871320
	95	0.07630373	0.09650767	0.11025790	0.11949490	0.13275510	0.14545020	0.16015500
	100	0.07501016	0.09539803	0.10799670	0.11728110	0.13154250	0.14335570	0.15809070

p	N	D. 50.0%	D. 75.0%	D. 85.0%	D. 90.0%	D. 95.0%	D. 97.5%	D. 99.0%
0.7	10	0.23346580	0.29188790	0.32812320	0.35332270	0.39513790	0.42900770	0.47221660
	15	0.19080000	0.24051080	0.27275480	0.29440010	0.32664820	0.35769540	0.39387650
	20	0.16909530	0.21247700	0.23834210	0.25755130	0.28786120	0.31333510	0.34272420
	25	0.15086600	0.18855190	0.21076520	0.22910820	0.25573770	0.28292850	0.31083010
	30	0.13939690	0.17492210	0.19661980	0.21230070	0.23744980	0.25960670	0.28468510
	35	0.12850240	0.16183740	0.18308790	0.19768870	0.21907820	0.24071550	0.25899410
	40	0.12068910	0.15224280	0.17142450	0.18453140	0.20644390	0.22438250	0.24885340
	45	0.11348120	0.14181030	0.15962400	0.17307790	0.19197390	0.21011500	0.22954480
	50	0.10895730	0.13769850	0.15428310	0.16594760	0.18402920	0.20069180	0.21991540
	55	0.10343530	0.12904940	0.14555750	0.15699400	0.17484690	0.19302210	0.21059290
	60	0.09940796	0.12497560	0.14069950	0.15202860	0.16969300	0.18479850	0.20277560
	65	0.09558793	0.11996150	0.13533180	0.14605370	0.16310600	0.17814340	0.19608930
	70	0.09234507	0.11628070	0.13132860	0.14199330	0.15814860	0.17167080	0.18934970
	75	0.08952898	0.11210610	0.12706940	0.13665760	0.15205680	0.16546450	0.18088640
	80	0.08720110	0.10981290	0.12354150	0.13290190	0.14786430	0.16295860	0.17937220
	85	0.08399600	0.10468150	0.11799250	0.12749540	0.14168870	0.15460220	0.17044540
	90	0.08226878	0.10310080	0.11604510	0.12463260	0.13838430	0.15095610	0.16658880
	95	0.07982187	0.09971616	0.11226650	0.12132340	0.13602350	0.14824280	0.16325010
	100	0.07810852	0.09778726	0.11017430	0.11863110	0.13258020	0.14514410	0.16047230

p	N	D. 50.0%	D. 75.0%	D. 85.0%	D. 90.0%	D. 95.0%	D. 97.5%	D. 99.0%
0.8	10	0.24067310	0.29890870	0.33527610	0.36202130	0.40155710	0.43712050	0.47697990
	15	0.19877310	0.24769480	0.27811810	0.29987220	0.33205290	0.36044590	0.39113330
	20	0.17402420	0.21656210	0.24469590	0.26379620	0.29185450	0.31771860	0.35541540
	25	0.15597350	0.19397150	0.21847770	0.23532730	0.26345940	0.28685200	0.31825230
	30	0.14283550	0.17784140	0.20017820	0.21600530	0.23832950	0.26037510	0.28429350
	35	0.13254260	0.16502310	0.18425730	0.19890030	0.22221120	0.24228220	0.26691860
	40	0.12465080	0.15474170	0.17343570	0.18794410	0.20923810	0.22634060	0.25032810
	45	0.11762900	0.14667590	0.16411090	0.17731800	0.19689070	0.21519710	0.23469180
	50	0.11256140	0.13962080	0.15673080	0.16910730	0.18835820	0.20550630	0.22550820
	55	0.10695770	0.13177520	0.14729530	0.15966290	0.17788530	0.19426500	0.21338620
	60	0.10280340	0.12779300	0.14402100	0.15505420	0.17160000	0.18713240	0.20509390
	65	0.09836937	0.12255620	0.13714220	0.14749000	0.16554240	0.18152420	0.19825520
	70	0.09456624	0.11834580	0.13261660	0.14229530	0.15827340	0.17439490	0.19380860
	75	0.09244024	0.11467550	0.12877840	0.13802480	0.15355200	0.16677490	0.18401070
	80	0.08947628	0.11088080	0.12422850	0.13393350	0.14907950	0.16224380	0.17970700
	85	0.08686423	0.10809090	0.12071010	0.12976280	0.14515080	0.15839050	0.17236860
	90	0.08437123	0.10527200	0.11658600	0.12542480	0.13935110	0.15296180	0.16787250
	95	0.08202260	0.10249400	0.11440410	0.12255810	0.13502480	0.14758980	0.16156160
	100	0.08010304	0.09962112	0.11123170	0.11920740	0.13302220	0.14551390	0.15972940

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
0.9	10	0.24418210	0.30368750	0.33831090	0.36384480	0.40184230	0.43963240	0.48344530
	15	0.20128800	0.25019820	0.28003290	0.30181050	0.33590490	0.36552670	0.40153120
	20	0.17643890	0.21800240	0.24385780	0.26402710	0.29425840	0.32069800	0.35674420
	25	0.15790570	0.19559050	0.21882610	0.23585100	0.26166930	0.28457000	0.31099010
	30	0.14485090	0.17956320	0.20236250	0.21824830	0.24291360	0.26571320	0.28983740
	35	0.13353300	0.16630550	0.18718740	0.20152750	0.22366080	0.24681400	0.27197310
	40	0.12597640	0.15585990	0.17428460	0.18763450	0.20827440	0.22899970	0.25030830
	45	0.11947860	0.14824280	0.16560560	0.17853530	0.19825160	0.21724090	0.23899630
	50	0.11345570	0.14090990	0.15806180	0.16970410	0.19047820	0.20767690	0.22835100
	55	0.10746800	0.13362280	0.14962480	0.16109740	0.17871600	0.19402660	0.21194990
	60	0.10424070	0.12925250	0.14569730	0.15691140	0.17473560	0.19094330	0.20731310
	65	0.10005780	0.12354360	0.13797890	0.14946510	0.16619540	0.18150800	0.19793390
	70	0.09659650	0.11879600	0.13313890	0.14380860	0.16008330	0.17501460	0.19105140
	75	0.09309255	0.11468170	0.12832330	0.13791980	0.15337080	0.16745180	0.18482860
	80	0.09068558	0.11259610	0.12586200	0.13557590	0.15179170	0.16461380	0.17975000
	85	0.08762843	0.10852890	0.12200130	0.13095910	0.14519090	0.16063100	0.17542640
	90	0.08516613	0.10512180	0.11761160	0.12651550	0.14075390	0.15335030	0.17046290
	95	0.08345171	0.10332350	0.11519670	0.12413060	0.13814420	0.15054180	0.16657270
	100	0.08082899	0.10021890	0.11262460	0.12142300	0.13447160	0.14593860	0.15743490

p	N	D.50.0%	D.75.0%	D.85.0%	D.90.0%	D.95.0%	D.97.5%	D.99.0%
1	10	0.24821430	0.30800630	0.34512990	0.37231830	0.41050880	0.44591730	0.49202610
	15	0.20120610	0.24918600	0.27951310	0.30112060	0.33594560	0.36809860	0.40529390
	20	0.17718830	0.22015280	0.24453000	0.26439030	0.29340290	0.32193630	0.35457470
	25	0.15891440	0.19783660	0.22190600	0.23834160	0.26476160	0.28846320	0.32028740
	30	0.14582550	0.17990980	0.20175690	0.21732500	0.24167110	0.26534070	0.29362540
	35	0.13586300	0.16810890	0.18863340	0.20298020	0.22464700	0.24475060	0.26577340
	40	0.12777830	0.15747990	0.17619590	0.18954280	0.21076780	0.23097260	0.25256040
	45	0.11981620	0.14809870	0.16607480	0.17918710	0.19806460	0.21710400	0.23997830
	50	0.11444080	0.14199450	0.15832240	0.17051490	0.18782810	0.20289840	0.22412580
	55	0.10799420	0.13477320	0.15143190	0.16280030	0.18019940	0.19652080	0.21556130
	60	0.10401390	0.12826000	0.14322600	0.15398190	0.17114070	0.18710650	0.20691770
	65	0.10067250	0.12427240	0.13974060	0.15042590	0.16610020	0.18068500	0.19666380
	70	0.09665276	0.11894870	0.13343590	0.14393060	0.15980150	0.17506670	0.19312940
	75	0.09361313	0.11492840	0.12903480	0.13864410	0.15462790	0.16893780	0.18555420
	80	0.08976267	0.11141720	0.12453300	0.13410560	0.15099280	0.16376190	0.17917810
	85	0.08787638	0.10897600	0.12208660	0.13159730	0.14557530	0.15877260	0.17310360
	90	0.08581609	0.10607760	0.11891050	0.12736920	0.14195270	0.15565380	0.16849440
	95	0.08387591	0.10315750	0.11505710	0.12364740	0.13752510	0.15096660	0.16685530
	100	0.08177004	0.10089520	0.11257130	0.12062610	0.13437460	0.14682080	0.16284210

Tabla A5. Percentiles de la distribución del estadístico ${}_1DSP_{T,N}$ para una muestra censurada tipo I de una distribución completamente especificada.

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.1	10	0.06126647	0.09696527	0.12885360	0.14342700	0.17116360	0.20158340	0.22698260
	15	0.08794682	0.08794682	0.10370210	0.12215730	0.14491360	0.16588950	0.18343310
	20	0.08499296	0.10375010	0.10375010	0.10763830	0.12700940	0.14642660	0.16481840
	25	0.07014741	0.11449830	0.11449830	0.11449830	0.11674530	0.13514220	0.15370430
	30	0.06126647	0.09420669	0.12241550	0.12241550	0.12241550	0.12241550	0.13751800
	35	0.07106716	0.08515257	0.10686020	0.12855980	0.12855980	0.12855980	0.12944650
	40	0.06205412	0.08076807	0.09515350	0.11226650	0.13350740	0.13350740	0.13350740
	45	0.05644403	0.08504160	0.08794682	0.09887107	0.12524810	0.13760230	0.13760230
	50	0.06068293	0.07753406	0.09400808	0.09400808	0.11485120	0.14106420	0.14106420
	55	0.05531175	0.07154031	0.08522348	0.09921462	0.10251410	0.12315910	0.14404110
	60	0.05196224	0.07396352	0.08034519	0.09075015	0.10375010	0.11120460	0.14663660
	65	0.05393588	0.06952072	0.07916685	0.08584391	0.10447070	0.10774740	0.12336980
	70	0.05049164	0.06572913	0.07835132	0.08379505	0.09538574	0.11130510	0.11664380
	75	0.04802874	0.06621443	0.07376014	0.08284869	0.09046812	0.10571040	0.11449830
	80	0.04932710	0.06407156	0.07128311	0.07990617	0.09169868	0.10182170	0.11738530
	85	0.04732220	0.06167961	0.07217475	0.07576169	0.08882961	0.09511097	0.11028670
	90	0.04580748	0.06126647	0.06937421	0.07846137	0.08643278	0.09823201	0.10834120
	95	0.04554133	0.05901770	0.06691757	0.07395334	0.08255869	0.09498518	0.10466670
	100	0.04480004	0.05790202	0.06823592	0.07229031	0.08427888	0.09183221	0.10375010

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.2	10	0.12090060	0.15160090	0.15160090	0.15254520	0.18425340	0.21070250	0.24430460
	15	0.09033447	0.13464590	0.17828130	0.17828130	0.17828130	0.17866920	0.20377010
	20	0.08750164	0.11856540	0.13153300	0.15206810	0.19408460	0.19408460	0.19408460
	25	0.08559262	0.10887130	0.13311840	0.13762480	0.15295920	0.18620300	0.20483280
	30	0.07414234	0.10475430	0.11346160	0.12703580	0.15160090	0.15698140	0.20569790
	35	0.07199261	0.09406566	0.11053110	0.12292990	0.13230490	0.15629350	0.16241440
	40	0.06887088	0.09055945	0.10399220	0.11105940	0.13073950	0.13804760	0.17071370
	45	0.06715754	0.08816373	0.09827816	0.10959620	0.12217760	0.14281500	0.15607440
	50	0.06264648	0.08151671	0.09512831	0.10119390	0.11730200	0.13000700	0.15160090
	55	0.06095959	0.07847775	0.09033447	0.09773187	0.11049000	0.12210830	0.13281800
	60	0.05926555	0.07699063	0.08629827	0.09505515	0.10692460	0.11856540	0.13660970
	65	0.05809042	0.07452758	0.08495363	0.09085927	0.10495080	0.11416130	0.12566590
	70	0.05534902	0.07249597	0.08287162	0.09016244	0.10021690	0.11211710	0.12339430
	75	0.05440294	0.07079055	0.08014820	0.08825749	0.09861387	0.10906020	0.12059400
	80	0.05323756	0.06800924	0.07753327	0.08379219	0.09608928	0.10586270	0.11704350
	85	0.05234122	0.06653278	0.07571867	0.08168274	0.09175553	0.10242060	0.11415290
	90	0.05096595	0.06447425	0.07325332	0.07988930	0.08937967	0.09733817	0.10964700
	95	0.04977359	0.06360259	0.07212506	0.07941334	0.08823968	0.09780010	0.11179440
	100	0.04876864	0.06240333	0.07048907	0.07625865	0.08508674	0.09404297	0.10682690

p	N	DSP. 50.0%	DSP. 75.0%	DSP. 85.0%	DSP. 90.0%	DSP. 95.0%	DSP. 97.5%	DSP. 99.0%
0.3	10	0.11582680	0.16477520	0.22189200	0.22544380	0.22544380	0.22544380	0.25371060
	15	0.10128960	0.14365400	0.16417740	0.16952920	0.20379560	0.25212420	0.25212420
	20	0.09424124	0.12889050	0.13895670	0.15615720	0.19238760	0.19240830	0.23266300
	25	0.09007578	0.11607130	0.12875030	0.14381700	0.16417740	0.18120060	0.21146770
	30	0.08310765	0.10676680	0.12053450	0.13325890	0.14709620	0.16846750	0.18432660
	35	0.07810810	0.10086260	0.11326690	0.12385890	0.13817640	0.15574490	0.16930520
	40	0.07319299	0.09484065	0.10693780	0.11715060	0.12971380	0.14767650	0.16073140
	45	0.06942320	0.09041308	0.10240420	0.11254140	0.12489500	0.14047860	0.15304580
	50	0.06676106	0.08669220	0.09845386	0.10589630	0.11890920	0.13418470	0.14949040
	55	0.06582855	0.08334972	0.09556451	0.10235450	0.11440180	0.12731540	0.14264950
	60	0.06359942	0.08052747	0.09174654	0.09859577	0.11060500	0.12302140	0.13599240
	65	0.06131706	0.07787364	0.08742225	0.09411966	0.10585840	0.11734200	0.12977390
	70	0.05904132	0.07533457	0.08537223	0.09245038	0.10332910	0.11424800	0.12852840
	75	0.05809826	0.07309401	0.08224363	0.09007578	0.10107690	0.11166840	0.12486830
	80	0.05614573	0.07073926	0.07940220	0.08639886	0.09650773	0.10612630	0.11857660
	85	0.05500247	0.06936383	0.07855019	0.08485436	0.09505077	0.10460670	0.11671770
	90	0.05347218	0.06773008	0.07659198	0.08229710	0.09187525	0.10150190	0.11255210
	95	0.05298666	0.06675860	0.07511605	0.08082140	0.09061195	0.09828673	0.10737850
	100	0.05186428	0.06487267	0.07262783	0.07844200	0.08834480	0.09675064	0.10725510

p	N	DSP. 50.0%	DSP. 75.0%	DSP. 85.0%	DSP. 90.0%	DSP. 95.0%	DSP. 97.5%	DSP. 99.0%
0.4	10	0.12281930	0.18272250	0.18530360	0.20851810	0.26012900	0.29233950	0.2923395
	15	0.11496660	0.14705980	0.16818530	0.17843180	0.21394170	0.2310730	0.2600634
	20	0.09879556	0.12712050	0.14894670	0.16113690	0.18375200	0.2058523	0.2240901
	25	0.09395298	0.12111490	0.13444760	0.14927080	0.16619220	0.1887541	0.2031740
	30	0.08507538	0.10922890	0.12710200	0.13503150	0.15421960	0.1676847	0.1830889
	35	0.08112051	0.10465160	0.11721970	0.12880360	0.14469200	0.1581199	0.1764158
	40	0.07637527	0.09812575	0.11184050	0.12099970	0.13506200	0.1501948	0.1646402
	45	0.07250694	0.09345271	0.10504580	0.11457840	0.12715020	0.1404770	0.1566520
	50	0.07026706	0.08891386	0.10151530	0.10951710	0.12251710	0.1336209	0.1487732
	55	0.06759442	0.08638484	0.09747913	0.10592410	0.11953440	0.1305181	0.1443422
	60	0.06561342	0.08321134	0.09394818	0.10112760	0.11280700	0.1236497	0.1366178
	65	0.06392835	0.07985422	0.08945034	0.09715670	0.10902410	0.1193925	0.1330286
	70	0.06195073	0.07789984	0.08782109	0.09488859	0.10562090	0.1152570	0.1287383
	75	0.05970842	0.07535092	0.08494986	0.09132164	0.10155470	0.1111383	0.1224124
	80	0.05880235	0.07330916	0.08239535	0.08895326	0.09888178	0.1091435	0.1208350
	85	0.05695655	0.07099776	0.07987457	0.08604516	0.09519646	0.1051723	0.1169763
	90	0.05540683	0.06954341	0.07792880	0.08414486	0.09407045	0.1030807	0.1136744
	95	0.05482805	0.06815340	0.07648923	0.08219927	0.09207182	0.0998360	0.1107853
	100	0.05344808	0.06664900	0.07455460	0.08026092	0.08955492	0.0989823	0.1089827

p	N	DSP. 50.0%	DSP. 75.0%	DSP. 85.0%	DSP. 90.0%	DSP. 95.0%	DSP. 97.5%	DSP. 99.0%
0.5	10	0.13248790	0.16994550	0.20127490	0.23161820	0.24681670	0.27754830	0.35643370
	15	0.11652090	0.14864440	0.17730130	0.18396850	0.21100890	0.23227950	0.26239780
	20	0.10468650	0.13406900	0.15099420	0.16513590	0.18537590	0.20570020	0.22523110
	25	0.09570291	0.12227640	0.13728620	0.15020490	0.16976150	0.18919890	0.21057020
	30	0.08923607	0.11378520	0.12804820	0.14037230	0.15572320	0.17189540	0.19176730
	35	0.08391315	0.10702500	0.12145090	0.13098990	0.14790680	0.16039210	0.18094660
	40	0.07973199	0.10083240	0.11350300	0.12261150	0.13847490	0.15195760	0.16948300
	45	0.07595375	0.09658823	0.10814250	0.11644260	0.13110530	0.14445440	0.16047120
	50	0.07247199	0.09167600	0.10271350	0.11102920	0.12407600	0.13722980	0.15087690
	55	0.07001258	0.08725578	0.09843801	0.10612960	0.11846490	0.12929840	0.14329730
	60	0.06851253	0.08572770	0.09588909	0.10348640	0.11435040	0.12606240	0.13953690
	65	0.06547171	0.08158199	0.09167777	0.09915968	0.11035270	0.12152190	0.13472450
	70	0.06372673	0.07923152	0.08878802	0.09639151	0.10656720	0.11624910	0.12878410
	75	0.06165738	0.07714745	0.08600481	0.09305071	0.10368290	0.11321430	0.12465850
	80	0.06041554	0.07530738	0.08436322	0.09087208	0.10162910	0.10998940	0.12130940
	85	0.05935381	0.07317017	0.08153673	0.08731074	0.09734187	0.10666920	0.11612490
	90	0.05762023	0.07163084	0.07976868	0.08518180	0.09452042	0.10302410	0.11445230
	95	0.05642038	0.06974820	0.07770083	0.08372395	0.09359492	0.10167420	0.11210300
	100	0.05514409	0.06837617	0.07661260	0.08266582	0.09163240	0.10083930	0.11115960

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.6	10	0.14054610	0.18002240	0.21257930	0.23076090	0.25489060	0.30233700	0.31775070
	15	0.11906840	0.15376120	0.17754930	0.19508410	0.21566770	0.24315510	0.26187040
	20	0.10965100	0.13861750	0.15498330	0.16951670	0.18846500	0.21027560	0.23236720
	25	0.09882491	0.12519700	0.14124170	0.15414700	0.17171100	0.19173950	0.21067990
	30	0.09298738	0.11655930	0.13005700	0.14019320	0.15947750	0.17367320	0.19259020
	35	0.08600203	0.10908900	0.12223000	0.13226850	0.14715670	0.16167350	0.18037220
	40	0.08236578	0.10398730	0.11630970	0.12472400	0.13982540	0.15352740	0.16882960
	45	0.07824598	0.09702013	0.10885620	0.11799720	0.13137710	0.14350530	0.15970790
	50	0.07513142	0.09390310	0.10561790	0.11329860	0.12612090	0.13856580	0.15349180
	55	0.07225224	0.08998886	0.10087640	0.10944560	0.12101790	0.13187540	0.14621070
	60	0.06939963	0.08696661	0.09656362	0.10402060	0.11506860	0.12504310	0.13819990
	65	0.06745906	0.08382918	0.09414760	0.10131570	0.11287640	0.12305490	0.13637610
	70	0.06546230	0.08071903	0.09015520	0.09695025	0.10791460	0.11721340	0.12904050
	75	0.06367772	0.07877309	0.08852788	0.09555340	0.10656150	0.11625980	0.12714560
	80	0.06168686	0.07672950	0.08538272	0.09198200	0.10096930	0.11073580	0.12205270
	85	0.06024705	0.07453254	0.08352069	0.08996361	0.09956332	0.10840470	0.11905110
	90	0.05904187	0.07281436	0.08137386	0.08761188	0.09744816	0.10615160	0.11669200
	95	0.05710729	0.07095096	0.07942553	0.08539858	0.09451970	0.10351310	0.11347620
	100	0.05640284	0.06950983	0.07754458	0.08365176	0.09240980	0.10044810	0.10986530

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.7	10	0.1475391	0.1854493	0.2194022	0.2305021	0.2630837	0.2976565	0.3153776
	15	0.1260730	0.1604169	0.1796662	0.1957363	0.2169122	0.2427220	0.2698086
	20	0.1127515	0.1431132	0.1590023	0.1725661	0.1929000	0.2114205	0.2335275
	25	0.1026845	0.1285454	0.1428721	0.1564150	0.1752374	0.1922218	0.2108079
	30	0.0954138	0.1199886	0.1342880	0.1437426	0.1618751	0.1758150	0.1962236
	35	0.0897257	0.1127908	0.1251304	0.1351862	0.1506897	0.1658915	0.1838438
	40	0.08466252	0.1054998	0.1180478	0.1267735	0.1419704	0.1554395	0.1700048
	45	0.0803822	0.0995897	0.1108457	0.1191876	0.1319309	0.1445207	0.1596351
	50	0.0778655	0.0966075	0.1073896	0.1151324	0.1275373	0.1378059	0.1520064
	55	0.0736876	0.0912934	0.1022776	0.1097301	0.1223057	0.1339083	0.1447305
	60	0.0718200	0.0880845	0.0985467	0.1064303	0.1186126	0.1299042	0.1443492
	65	0.0692923	0.0850820	0.0949314	0.1020018	0.1137041	0.1244438	0.1366220
	70	0.0671948	0.0829978	0.0923390	0.0992311	0.1090611	0.1196370	0.1320007
	75	0.0653457	0.0804236	0.0895136	0.0961067	0.1062367	0.1157646	0.1286217
	80	0.0639486	0.0783812	0.0870832	0.0935368	0.1039610	0.1122575	0.1241717
	85	0.0617448	0.0755231	0.0843318	0.0904094	0.1005092	0.1092463	0.1198235
	90	0.0605954	0.0745718	0.0827541	0.0885166	0.0983123	0.1072160	0.1183883
	95	0.0588955	0.0722365	0.0802224	0.0861404	0.0951716	0.1031403	0.1111979
	100	0.0576982	0.0705152	0.07845753	0.08421320	0.09364387	0.10140300	0.11103750

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.8	10	0.15405220	0.18966140	0.21807330	0.23671700	0.26001210	0.29147220	0.31539850
	15	0.12695810	0.16226470	0.18449580	0.20195990	0.22160470	0.24396500	0.26940890
	20	0.11685910	0.14572810	0.16299880	0.17717500	0.19755250	0.21848880	0.23832390
	25	0.10468330	0.13086540	0.14833440	0.15982850	0.17786370	0.19585830	0.21991290
	30	0.09810486	0.12311710	0.13694460	0.14857200	0.16401380	0.17774990	0.19788950
	35	0.09262773	0.11404240	0.12864040	0.13737820	0.15338330	0.16869820	0.18663370
	40	0.08700706	0.10805390	0.12039530	0.13002730	0.14336350	0.15582590	0.17223120
	45	0.08286446	0.10306550	0.11484430	0.12259030	0.13725780	0.14917980	0.16415450
	50	0.08052939	0.09809546	0.10971190	0.11910650	0.13133340	0.14217240	0.15806280
	55	0.07615347	0.09369348	0.10434420	0.11235400	0.12414810	0.13616690	0.14957280
	60	0.07377251	0.09111950	0.10203380	0.10885380	0.12074470	0.13114280	0.14539770
	65	0.07110166	0.08752124	0.09731509	0.10470760	0.11551800	0.12566590	0.13925100
	70	0.06886419	0.08465177	0.09374672	0.10035910	0.11114410	0.12251670	0.13740680
	75	0.06721032	0.08246524	0.09192586	0.09832796	0.10781730	0.11745490	0.12966250
	80	0.06551584	0.08018767	0.08911092	0.09535515	0.10496430	0.11485430	0.12609380
	85	0.06388196	0.07783853	0.08685654	0.09287515	0.10212820	0.10994760	0.12116410
	90	0.06217005	0.07507988	0.08381769	0.09017490	0.09975144	0.10754210	0.11577830
	95	0.06068682	0.07384288	0.08129518	0.08747230	0.09643516	0.10415950	0.11430390
	100	0.05925477	0.07191124	0.07963780	0.08558900	0.09479694	0.10317610	0.11248340

p	N	DSP. 50.0%	DSP. 75.0%	DSP. 85.0%	DSP. 90.0%	DSP. 95.0%	DSP. 97.5%	DSP. 99.0%
0.9	10	0.15242610	0.19710380	0.21384180	0.23303600	0.26328300	0.28457350	0.32195130
	15	0.13343350	0.16563530	0.18596260	0.20209280	0.22324310	0.24778590	0.27173760
	20	0.12065360	0.14913560	0.16788480	0.18134880	0.19979200	0.21622970	0.24124170
	25	0.10914500	0.13580390	0.15136550	0.16417740	0.18071300	0.19530820	0.21371390
	30	0.10319940	0.12850060	0.14201490	0.15250450	0.17043130	0.18499120	0.20168660
	35	0.09584903	0.11815460	0.13135850	0.14156280	0.15684890	0.17163010	0.18816060
	40	0.09010280	0.11041410	0.12338540	0.13330280	0.14787940	0.16092620	0.17842270
	45	0.08635825	0.10613190	0.11814220	0.12672540	0.14144080	0.15376450	0.16786800
	50	0.08229982	0.10093130	0.11269060	0.12075580	0.13388350	0.14575170	0.16036390
	55	0.07891771	0.09702839	0.10756430	0.11489840	0.12667430	0.13767290	0.15349840
	60	0.07640257	0.09376836	0.10422290	0.11147030	0.12285680	0.13398360	0.14835960
	65	0.07392909	0.09026294	0.09987840	0.10739330	0.11850700	0.12804150	0.14089340
	70	0.07136516	0.08683125	0.09604915	0.10284430	0.11343330	0.12302180	0.13646950
	75	0.06920877	0.08402429	0.09295808	0.09943383	0.10953390	0.12003230	0.13057780
	80	0.06771447	0.08237738	0.09129076	0.09714247	0.10782400	0.11691410	0.12747980
	85	0.06596939	0.07996125	0.08830203	0.09436283	0.10425190	0.11289270	0.12475060
	90	0.06440334	0.07792084	0.08637580	0.09233972	0.10160620	0.10991710	0.12096280
	95	0.06260740	0.07585534	0.08375676	0.08950700	0.09868751	0.10758390	0.11743600
	100	0.06146132	0.07442307	0.08226064	0.08802989	0.09622913	0.10446000	0.11610310

p	N	DSP. 50.0%	DSP. 75.0%	DSP. 85.0%	DSP. 90.0%	DSP. 95.0%	DSP. 97.5%	DSP. 99.0%
1	10	0.15226200	0.19284740	0.21798950	0.23410550	0.26040530	0.28536080	0.32041370
	15	0.13291540	0.16466600	0.18354720	0.19911230	0.22197320	0.24155330	0.26659940
	20	0.12089190	0.14881160	0.16556220	0.17826240	0.19818960	0.21649850	0.24236190
	25	0.11193520	0.13763290	0.15383550	0.16438560	0.18262390	0.19982160	0.22027970
	30	0.10401170	0.12727760	0.14145100	0.15067970	0.16773180	0.18353030	0.20149710
	35	0.09839298	0.12023210	0.13337730	0.14306350	0.15714560	0.17154080	0.18752700
	40	0.09363236	0.11328450	0.12563690	0.13418220	0.14897070	0.16199500	0.17702630
	45	0.08860231	0.10757140	0.11899630	0.12721070	0.14052610	0.15370510	0.16790190
	50	0.08555861	0.10358190	0.11399450	0.12188060	0.13363340	0.14557290	0.16005580
	55	0.08178874	0.09927717	0.11008350	0.11724670	0.12964890	0.13921850	0.15333120
	60	0.07908161	0.09488084	0.10508690	0.11218450	0.12339060	0.13397720	0.14721700
	65	0.07697512	0.09239453	0.10211220	0.10920730	0.11988070	0.12889740	0.14093460
	70	0.07419482	0.08932611	0.09844684	0.10553590	0.11571700	0.12582520	0.13957360
	75	0.07198263	0.08696234	0.09555823	0.10245320	0.11236440	0.12160300	0.13389220
	80	0.06970511	0.08379840	0.09281136	0.09898269	0.10872380	0.11924950	0.12970600
	85	0.06847670	0.08214985	0.09049508	0.09657261	0.10574480	0.11602470	0.12573280
	90	0.06715518	0.08036129	0.08871694	0.09491022	0.10420360	0.11174900	0.12207760
	95	0.06562729	0.07861776	0.08612994	0.09248098	0.10154800	0.11036620	0.12019810
	100	0.06410036	0.07678990	0.08448836	0.09014472	0.09822986	0.10600180	0.11488910

Tabla A6. Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2DSP_{n,N}$ para una muestra censurada tipo II de una distribución completamente especificada.

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.1	10	0.06143721	0.10406120	0.13120030	0.15343240	0.19579790	0.23063700	0.27094480
	15	0.05011781	0.08427838	0.10741360	0.12708880	0.16423870	0.19208510	0.22925850
	20	0.06405544	0.09297178	0.11326420	0.12870790	0.15668340	0.17983680	0.20582340
	25	0.05753869	0.08459249	0.10330150	0.11621730	0.13853240	0.16354090	0.18769360
	30	0.06009133	0.08511769	0.10190930	0.11554730	0.13497880	0.15533400	0.17524340
	35	0.05628837	0.07957180	0.09491601	0.10649630	0.12461250	0.14142610	0.16174260
	40	0.05647523	0.07799218	0.09199673	0.10212160	0.11920700	0.13370310	0.15095830
	45	0.05298340	0.07324084	0.08635147	0.09633367	0.11133250	0.12603340	0.14441150
	50	0.05388234	0.07351045	0.08586275	0.09514960	0.10964770	0.12498270	0.14023920
	55	0.05086030	0.06900362	0.08047215	0.08906402	0.10422010	0.11706630	0.13500050
	60	0.05086931	0.06855578	0.07944367	0.08778049	0.10133490	0.11445310	0.13274530
	65	0.04885665	0.06575364	0.07639948	0.08439324	0.09747286	0.10820060	0.12074550
	70	0.04832687	0.06483039	0.07441119	0.08202564	0.09511057	0.10655790	0.12099570
	75	0.04684988	0.06193347	0.07181383	0.07882516	0.09043905	0.10213390	0.11610640
	80	0.04714586	0.06202576	0.07147492	0.07880379	0.09016912	0.10170150	0.11564770
	85	0.04518975	0.05984859	0.06887069	0.07568554	0.08658920	0.09709833	0.10999970
	90	0.04503695	0.05963630	0.06861245	0.07546529	0.08678704	0.09632666	0.10873630
	95	0.04354484	0.05705825	0.06641199	0.07274964	0.08344414	0.09344126	0.10580790
	100	0.04356223	0.05699367	0.06566290	0.07223037	0.08245930	0.09270626	0.10378070

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.2	10	0.09062490	0.13246070	0.15991030	0.18058460	0.21491130	0.24579180	0.28150490
	15	0.08442597	0.12003170	0.14197450	0.15786900	0.18448860	0.20938990	0.24159920
	20	0.07971557	0.11072630	0.12887170	0.14375220	0.16566860	0.18839460	0.21259790
	25	0.07673369	0.10281060	0.12040580	0.13238900	0.15289560	0.17432110	0.19699940
	30	0.07231308	0.09717036	0.11283080	0.12407090	0.14121800	0.15927970	0.17824540
	35	0.06916136	0.09233674	0.10654010	0.11633130	0.13246950	0.14764150	0.16702020
	40	0.06624337	0.08793838	0.10042190	0.11009260	0.12623590	0.14148940	0.16184860
	45	0.06372143	0.08400929	0.09681296	0.10638890	0.12102240	0.13690910	0.15749630
	50	0.06198712	0.08109646	0.09277392	0.10085830	0.11465680	0.13027980	0.14769300
	55	0.05975335	0.07742484	0.08874032	0.09696845	0.11038910	0.12208230	0.13586810
	60	0.05787715	0.07532624	0.08601224	0.09367866	0.10641080	0.11873230	0.13560410
	65	0.05636414	0.07360321	0.08359415	0.09099778	0.10276460	0.11401570	0.12708800
	70	0.05503754	0.07181596	0.08158276	0.08933210	0.10047630	0.11089770	0.12302380
	75	0.05383371	0.06970875	0.07985060	0.08695285	0.09789317	0.10959540	0.12257390
	80	0.05249501	0.06718381	0.07680533	0.08360563	0.09492898	0.10618310	0.11993680
	85	0.05145826	0.06629848	0.07484548	0.08095761	0.09212888	0.10311990	0.11490850
	90	0.05010025	0.06430544	0.07315442	0.07974320	0.08938109	0.09799937	0.11033190
	95	0.04926385	0.06331148	0.07175869	0.07809740	0.08818800	0.09796497	0.11205080
	100	0.04852227	0.06185124	0.06994739	0.07629029	0.08519302	0.09393300	0.10640280

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.3	10	0.10490270	0.14576690	0.17246400	0.19135150	0.22390100	0.25385330	0.29066540
	15	0.09304654	0.12724430	0.14902140	0.16448280	0.18871580	0.21225010	0.24373720
	20	0.09000012	0.11929560	0.13832760	0.15262260	0.17347400	0.19542610	0.22000870
	25	0.08208273	0.10936010	0.12632390	0.13882420	0.15857670	0.17912030	0.19953690
	30	0.07899853	0.10322470	0.11868380	0.12940720	0.14710460	0.16320530	0.18573930
	35	0.07465054	0.09779292	0.11156360	0.12068860	0.13777800	0.15292420	0.17158070
	40	0.07191333	0.09339889	0.10669310	0.11606440	0.13017390	0.14480840	0.16092120
	45	0.06831202	0.08864408	0.10173740	0.11086080	0.12444000	0.13879270	0.15314080
	50	0.06645623	0.08613787	0.09696154	0.10520670	0.11921260	0.13251610	0.14849800
	55	0.06392321	0.08224283	0.09351711	0.10212200	0.11409710	0.12605470	0.14082050
	60	0.06242235	0.07966970	0.09100959	0.09861710	0.11086650	0.12186800	0.13599240
	65	0.06010758	0.07660598	0.08665307	0.09379656	0.10577480	0.11626440	0.13006790
	70	0.05861395	0.07487326	0.08497825	0.09234492	0.10328090	0.11390870	0.12714520
	75	0.05700475	0.07255681	0.08181360	0.08893410	0.09998472	0.11024400	0.12430170
	80	0.05547316	0.07041421	0.07915409	0.08600818	0.09644559	0.10622940	0.11782520
	85	0.05462453	0.06908247	0.07811706	0.08438014	0.09435052	0.10421510	0.11614230
	90	0.05312367	0.06701796	0.07628085	0.08225059	0.09181936	0.10122630	0.11256430
	95	0.05228982	0.06636544	0.07469690	0.08078062	0.09068325	0.09890205	0.10912720
	100	0.05148902	0.06456163	0.07260535	0.07869120	0.08862633	0.09686931	0.10764970

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.4	10	0.11475650	0.15610790	0.18094690	0.19999340	0.22909540	0.25709310	0.29266880
	15	0.10402230	0.13925420	0.16000830	0.17489040	0.19932500	0.22025800	0.24730040
	20	0.09501191	0.12425400	0.14280660	0.15631260	0.17767130	0.19647300	0.22030100
	25	0.08893025	0.11584000	0.13248190	0.14395740	0.16486710	0.18406850	0.20195640
	30	0.08376853	0.10805720	0.12280850	0.13365620	0.14959740	0.16460480	0.18251630
	35	0.07910294	0.10200640	0.11517030	0.1256583	0.14228710	0.15822130	0.17361340
	40	0.07592891	0.09760147	0.11015560	0.11921640	0.13406600	0.14743700	0.16356450
	45	0.07166654	0.09204414	0.10394430	0.11237080	0.12602990	0.13991270	0.15719300
	50	0.06908023	0.08833648	0.09983093	0.10844040	0.12227510	0.13363890	0.14858100
	55	0.06704302	0.08545806	0.09638476	0.10422908	0.11782820	0.12972850	0.14422730
	60	0.06504762	0.08202864	0.09297150	0.10055500	0.11208100	0.12307530	0.13656500
	65	0.06313498	0.07915106	0.08930730	0.09672985	0.10834660	0.11934740	0.13133980
	70	0.06138132	0.07714362	0.08715547	0.09428876	0.10517660	0.11508040	0.12894440
	75	0.05942737	0.07447493	0.08441394	0.09094231	0.10107060	0.11083120	0.12215610
	80	0.05840311	0.07310128	0.08206036	0.08804239	0.09859109	0.10882620	0.12083500
	85	0.05638184	0.07067517	0.07934807	0.08570548	0.09497943	0.10454460	0.11597740
	90	0.05499709	0.06899216	0.07759820	0.08384074	0.09364043	0.10321770	0.11362970
	95	0.05439159	0.06775944	0.07606927	0.08220273	0.09187510	0.09952302	0.11047650
	100	0.05324274	0.06652623	0.07429458	0.07998217	0.08960635	0.09902732	0.10899540

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.5	10	0.12274240	0.16283090	0.18912190	0.20741990	0.23802300	0.26233290	0.29341910
	15	0.10744350	0.14242310	0.16364760	0.17939590	0.20335320	0.22522520	0.25245070
	20	0.10001320	0.13044130	0.14850230	0.16063630	0.18204850	0.20024830	0.21969120
	25	0.09192762	0.11825640	0.13442870	0.14677890	0.16567150	0.18324270	0.20502220
	30	0.08713339	0.11152200	0.12619640	0.13619770	0.15366920	0.16939260	0.18861570
	35	0.08222231	0.10478500	0.11886980	0.12944720	0.14474160	0.15860130	0.17755280
	40	0.07847551	0.09936317	0.11208180	0.12185130	0.13680950	0.15100340	0.16759580
	45	0.07495023	0.09501826	0.10705950	0.11578820	0.12961040	0.14266420	0.15856250
	50	0.07196646	0.09084979	0.10189490	0.11024590	0.12253320	0.13574020	0.14928730
	55	0.06907578	0.08646501	0.09743288	0.10537680	0.11666610	0.12753580	0.14209790
	60	0.06772819	0.08489478	0.09514842	0.10269830	0.11391660	0.12508710	0.13980850
	65	0.06473052	0.08108092	0.09145525	0.09848116	0.11008930	0.12107050	0.13405080
	70	0.06324988	0.07887636	0.08815686	0.09516435	0.10579420	0.11561220	0.12801540
	75	0.06123561	0.07642199	0.08550230	0.09253102	0.10309870	0.11321430	0.12481530
	80	0.06031517	0.07474099	0.08378498	0.09011258	0.10118340	0.10990910	0.12123620
	85	0.05872428	0.07264126	0.08095366	0.08701374	0.09670634	0.10551360	0.11611460
	90	0.05717670	0.07118783	0.07929325	0.08471734	0.09375081	0.10278190	0.11497520
	95	0.05611183	0.06946323	0.07757444	0.08354344	0.09328051	0.10124010	0.11181890
	100	0.05498019	0.06800365	0.07631876	0.08247039	0.09128228	0.10069990	0.10996510

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.6	10	0.12843450	0.16999370	0.19636220	0.21433410	0.24226340	0.26668930	0.29770050
	15	0.11481880	0.14930760	0.16937290	0.18433920	0.20829890	0.22923280	0.25017640
	20	0.10475630	0.13323680	0.15135030	0.16347720	0.18345230	0.20222650	0.22547670
	25	0.09654884	0.12247180	0.13902340	0.15128900	0.16940280	0.18720430	0.20508560
	30	0.09071368	0.11378250	0.12764160	0.13839290	0.15507560	0.17140710	0.19040750
	35	0.08508992	0.10743960	0.12053780	0.12959660	0.14485650	0.15923330	0.17681760
	40	0.08119265	0.10227690	0.11479370	0.12397840	0.13889010	0.15185320	0.16639700
	45	0.07739858	0.09630954	0.10806860	0.11696420	0.13038130	0.14240940	0.15880970
	50	0.07441829	0.09283204	0.10445380	0.11267770	0.12515690	0.13660330	0.15128820
	55	0.07162289	0.08914683	0.10024240	0.10826490	0.12024200	0.13135010	0.14599630
	60	0.06885117	0.08636008	0.09604434	0.10374500	0.11446310	0.12386470	0.13625410
	65	0.06710202	0.08335803	0.09364033	0.10041660	0.11183570	0.12218630	0.13637610
	70	0.06491464	0.08047605	0.08958073	0.09652502	0.10752980	0.11684130	0.12874010
	75	0.06310291	0.07825665	0.08777420	0.09497326	0.10596740	0.11610280	0.12689070
	80	0.06142862	0.07607538	0.08484603	0.09151559	0.10065100	0.11036700	0.12085910
	85	0.06005731	0.07427534	0.08318811	0.08928591	0.09852934	0.10833610	0.11852750
	90	0.05869810	0.07238745	0.08072050	0.08710873	0.09694086	0.10602860	0.11594360
	95	0.05666497	0.07075322	0.07912793	0.08498558	0.09393624	0.10177520	0.11228240
	100	0.05619630	0.06938588	0.07735829	0.08332672	0.09185294	0.10007980	0.10940240

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.7	10	0.13546520	0.17623840	0.19973410	0.21857770	0.24550340	0.27052790	0.29723710
	15	0.11785820	0.15150740	0.17257370	0.18807820	0.21023460	0.22887470	0.25241790
	20	0.10842520	0.13714540	0.15488700	0.16714520	0.18713340	0.20511610	0.22508780
	25	0.09907478	0.12360800	0.13923490	0.15075810	0.17009160	0.18784350	0.20605370
	30	0.09334516	0.11714180	0.13159550	0.14160230	0.15844900	0.17174550	0.19016650
	35	0.08787356	0.10999700	0.12339590	0.13253470	0.14835220	0.16060860	0.17979260
	40	0.08349720	0.10389570	0.11651010	0.12526670	0.14018490	0.15310860	0.16722070
	45	0.07936785	0.09793991	0.10964770	0.11786780	0.13149620	0.14298810	0.15743630
	50	0.07699619	0.09544937	0.10629870	0.11401610	0.12630110	0.13661700	0.14964610
	55	0.07287760	0.09020901	0.10111270	0.10876550	0.12146990	0.13268200	0.14330510
	60	0.07103750	0.08751136	0.09773301	0.10558230	0.11753900	0.12795840	0.14311440
	65	0.06857385	0.08442932	0.09426208	0.10157610	0.11251640	0.12310270	0.13517670
	70	0.06668777	0.08249274	0.09150222	0.09872877	0.10829210	0.11871840	0.13076510
	75	0.06485138	0.08012803	0.08911990	0.09569397	0.10554340	0.11466290	0.12648800
	80	0.06357874	0.07793597	0.08655480	0.09293781	0.10335570	0.11126080	0.12325040
	85	0.06122633	0.07494229	0.08363461	0.08970465	0.09935471	0.10810920	0.11882610
	90	0.06019760	0.07415046	0.08246328	0.08798979	0.09792558	0.10588640	0.11680310
	95	0.05849562	0.07173302	0.07957021	0.08574988	0.09452013	0.10254670	0.11038160
	100	0.05750203	0.07046683	0.07849055	0.08398621	0.09297666	0.10124690	0.11079350

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.8	10	0.14118280	0.18058830	0.20480670	0.22064690	0.24582810	0.27258890	0.30213240
	15	0.12374860	0.15699420	0.17590680	0.19040060	0.21223360	0.23209050	0.25757740
	20	0.11191460	0.14081340	0.15887930	0.17142020	0.18931160	0.20762050	0.23113660
	25	0.10310180	0.12816810	0.14360360	0.15593380	0.17302030	0.18922590	0.21366440
	30	0.09625439	0.11998840	0.13438820	0.14396470	0.15996570	0.17367080	0.19259250
	35	0.09042764	0.11202210	0.12543870	0.13483920	0.14892980	0.16401540	0.18197190
	40	0.08626405	0.10636630	0.11916220	0.12793510	0.14115570	0.15360610	0.16811810
	45	0.08193187	0.10125510	0.11295000	0.12078930	0.13448060	0.14599960	0.16120430
	50	0.07909768	0.09702171	0.10822860	0.11741160	0.12941270	0.14001690	0.15438180
	55	0.07554281	0.09206101	0.10295070	0.11109650	0.12250340	0.13376370	0.14896430
	60	0.07286677	0.09020757	0.10054060	0.10738600	0.11958500	0.12969700	0.14164100
	65	0.07047008	0.08650237	0.09651190	0.10368450	0.11407260	0.12431950	0.13687890
	70	0.06823902	0.08404550	0.09318827	0.10011740	0.11060670	0.12111820	0.13573160
	75	0.06667428	0.08159506	0.09093636	0.09745478	0.10671270	0.11590700	0.12842480
	80	0.06505431	0.07951034	0.08848751	0.09455333	0.10465690	0.11427950	0.12516850
	85	0.06327128	0.07695524	0.08610457	0.09225322	0.10137010	0.10878760	0.11979820
	90	0.06165018	0.07442098	0.08285835	0.08887967	0.09814528	0.10664540	0.11536550
	95	0.06026716	0.07324041	0.08079985	0.08649509	0.09548293	0.10290720	0.11241120
	100	0.05884000	0.07144817	0.07921382	0.08498953	0.09351196	0.10176470	0.11088280

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
0.9	10	0.14601800	0.18491700	0.20793190	0.22403380	0.25049720	0.27646470	0.30721070
	15	0.12737060	0.15980000	0.17844830	0.19333470	0.21461300	0.23739220	0.26256980
	20	0.11669910	0.14417850	0.16204740	0.17434960	0.19297320	0.21095920	0.23352910
	25	0.10553590	0.13098730	0.14635420	0.15746950	0.17543760	0.19024940	0.20792850
	30	0.09979057	0.12343150	0.13814550	0.14806230	0.16416380	0.17940020	0.19547790
	35	0.09321619	0.11501470	0.12750190	0.13671480	0.15248470	0.16600490	0.18260320
	40	0.08830686	0.10834270	0.12069080	0.12909610	0.14298770	0.15446900	0.17048460
	45	0.08452255	0.10373630	0.11544250	0.12382530	0.13690060	0.14969060	0.16200020
	50	0.08091558	0.09931788	0.11059890	0.11880940	0.13108880	0.14124320	0.15484360
	55	0.07744594	0.09462339	0.10551580	0.11290850	0.12377690	0.13417390	0.14703200
	60	0.07574227	0.09263465	0.10261160	0.10986930	0.12052430	0.13026820	0.14393500
	65	0.07294973	0.08880804	0.09848863	0.10540550	0.11621400	0.12599220	0.13800160
	70	0.07054844	0.08577347	0.09484747	0.10118940	0.11131520	0.12045440	0.13422110
	75	0.06844046	0.08261263	0.09127270	0.09764361	0.10759280	0.11760230	0.12872880
	80	0.06711992	0.08153677	0.09007301	0.09591985	0.10644740	0.11460000	0.12577200
	85	0.06497917	0.07901380	0.08716263	0.09300827	0.10284150	0.11129620	0.12179140
	90	0.06353212	0.07713241	0.08543218	0.09123097	0.10036530	0.10826750	0.11805070
	95	0.06203750	0.07486338	0.08262532	0.08848202	0.09749514	0.10554120	0.11643420
	100	0.06086659	0.07381169	0.08162492	0.08728416	0.09546362	0.10336550	0.11459790

p	N	DSP.50.0%	DSP.75.0%	DSP.85.0%	DSP.90.0%	DSP.95.0%	DSP.97.5%	DSP.99.0%
1	10	0.15226200	0.19284740	0.21798950	0.23410550	0.26040530	0.28536080	0.32041370
	15	0.13291540	0.16466600	0.18354720	0.19911230	0.22197320	0.24155330	0.26659940
	20	0.12089190	0.14881160	0.16556220	0.17826240	0.19818960	0.21649850	0.24236190
	25	0.11193520	0.13763290	0.15383550	0.16438560	0.18262390	0.19982160	0.22027970
	30	0.10401170	0.12727760	0.14145100	0.15067970	0.16773180	0.18353030	0.20149710
	35	0.09839298	0.12023210	0.13337730	0.14306350	0.15714560	0.17154080	0.18752700
	40	0.09363236	0.11328450	0.12563690	0.13418220	0.14897070	0.16199500	0.17702630
	45	0.08860231	0.10757140	0.11899630	0.12721070	0.14052610	0.15370510	0.16790190
	50	0.08555861	0.10358190	0.11399450	0.12188060	0.13363340	0.14557290	0.16005580
	55	0.08178874	0.09927717	0.11008350	0.11724670	0.12964890	0.13921850	0.15333120
	60	0.07908161	0.09488084	0.10508690	0.11218450	0.12339060	0.13397720	0.14721700
	65	0.07697512	0.09239453	0.10211220	0.10920730	0.11988070	0.12889740	0.14093460
	70	0.07419482	0.08932611	0.09844684	0.10553590	0.11571700	0.12582520	0.13957360
	75	0.07198263	0.08696234	0.09555823	0.10245320	0.11236440	0.12160300	0.13389220
	80	0.06970511	0.08379840	0.09281136	0.09898269	0.10872380	0.11924950	0.12970600
	85	0.06847670	0.08214985	0.09049508	0.09657261	0.10574480	0.11602470	0.12573280
	90	0.06715518	0.08036129	0.08871694	0.09491022	0.10420360	0.11174900	0.12207760
	95	0.06562729	0.07861776	0.08612994	0.09248098	0.10154800	0.11036620	0.12019810
	100	0.06410036	0.07678990	0.08448836	0.09014472	0.09822986	0.10600180	0.11488910

Tabla A7 Percentiles de la distribución del estadístico D para una distribución normal de parámetros desconocidos.

N	D.50%	D.75%	D.90%	D.95%	D.99%
10	0.18071180	0.21256420	0.24488290	0.26668450	0.3051414
12	0.16570020	0.19446760	0.22459000	0.24543670	0.2847489
14	0.15443960	0.18221680	0.21052710	0.22981600	0.2677959
16	0.14482360	0.17086380	0.19701340	0.21482450	0.2505688
18	0.13688830	0.16167840	0.18717220	0.20160480	0.2347195
20	0.13066450	0.15383590	0.17692740	0.19259920	0.2230156
22	0.12458590	0.14623220	0.16869120	0.18365020	0.2133241
24	0.11860070	0.13991700	0.16172980	0.17605170	0.2064522
26	0.11506850	0.13576280	0.15641480	0.16993550	0.2001411
28	0.11096310	0.13058350	0.15072800	0.16438490	0.1908836
30	0.10789580	0.12728900	0.14669930	0.16059570	0.1868742
32	0.10459580	0.12276770	0.14143940	0.15418240	0.1784677
34	0.10191800	0.11989700	0.13867930	0.15019800	0.1736575
36	0.09893352	0.11600540	0.13476980	0.14570000	0.1714258
38	0.09577199	0.11308530	0.13088310	0.14268450	0.1670035
40	0.09387456	0.11047180	0.12781480	0.13944000	0.1616408
42	0.09165303	0.10784610	0.12468290	0.13563210	0.1594238
44	0.08976520	0.10522140	0.12184710	0.13300010	0.1545318
46	0.08780857	0.10339620	0.11891180	0.12966000	0.1514198
48	0.08592671	0.10122150	0.11662910	0.12745410	0.1476479
50	0.08409214	0.09862017	0.11429960	0.12361580	0.1444075
52	0.08220069	0.09664032	0.11149000	0.12209120	0.1438343
54	0.08107460	0.09529050	0.11067290	0.12045980	0.1409657
56	0.07919885	0.09367716	0.10851320	0.11799580	0.1385402
58	0.07852149	0.09223930	0.10672130	0.11605340	0.1368401
60	0.07725938	0.09094662	0.10519590	0.11464060	0.1334862
62	0.07584652	0.08930691	0.10320920	0.11250030	0.1298280
64	0.07437850	0.08760084	0.10168500	0.11036160	0.1285886
66	0.07345345	0.08608441	0.09990929	0.10816560	0.1277646
68	0.07270937	0.08544679	0.09857328	0.10744210	0.1257449
70	0.07155647	0.08425918	0.09760311	0.10655230	0.1243145
72	0.07081536	0.08275892	0.09595497	0.10485340	0.1209091
74	0.06965164	0.08210978	0.09478789	0.10262040	0.1196141
76	0.06901148	0.08074030	0.09349120	0.10218900	0.1200573
78	0.06811661	0.07992641	0.09184580	0.10021190	0.1177091
80	0.06710640	0.07896037	0.09153490	0.09943506	0.1152902
82	0.06637318	0.07798861	0.08997641	0.09738409	0.1127795
84	0.06529481	0.07713934	0.08923265	0.09701399	0.1127266
86	0.06485260	0.07621072	0.08839335	0.09619168	0.1116344
88	0.06392456	0.07525751	0.08643313	0.09447029	0.1096192
90	0.06326121	0.07460202	0.08622999	0.09387873	0.1116113
92	0.06280062	0.07406598	0.08572264	0.09339871	0.1080862
94	0.06210691	0.07291935	0.08413269	0.09188632	0.1045242
96	0.06142232	0.07237180	0.08385004	0.09173027	0.1054045
98	0.06087523	0.07150285	0.08284027	0.08981114	0.1040007
100	0.06018017	0.07066672	0.08128045	0.08852421	0.1035494

Tabla A8 Percentiles de la distribución del estadístico *DSP* para una distribución normal de parámetros desconocidos.

N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
10	0.09342864	0.11315320	0.13285620	0.14616380	0.17045130
12	0.08973061	0.10768980	0.12628190	0.13865570	0.16366940
14	0.08646889	0.10371650	0.12076130	0.13230850	0.15604740
16	0.08350397	0.09949797	0.11602130	0.12717170	0.14839230
18	0.08091176	0.09612180	0.11187400	0.12240160	0.14136450
20	0.07861922	0.09320550	0.10806870	0.11809700	0.13946440
22	0.07667557	0.09042684	0.10493500	0.11400060	0.13406560
24	0.07405584	0.08771645	0.10167040	0.11077220	0.13183450
26	0.07291397	0.08607923	0.09941590	0.10813820	0.12924510
28	0.07095609	0.08379331	0.09721925	0.10599510	0.12188520
30	0.06999766	0.08282812	0.09573576	0.10459050	0.12134340
32	0.06846073	0.08049745	0.09281268	0.10091210	0.11833430
34	0.06716674	0.07917123	0.09165253	0.09962325	0.11473550
36	0.06579217	0.07734308	0.08948871	0.09724373	0.11599180
38	0.06455191	0.07635467	0.08800973	0.09542105	0.11414810
40	0.06360359	0.07498655	0.08688757	0.09388433	0.10887890
42	0.06244353	0.07336510	0.08477928	0.09235355	0.10906010
44	0.06176660	0.07281033	0.08420006	0.09154889	0.10665590
46	0.06093119	0.07162548	0.08232854	0.08934537	0.10553230
48	0.05970683	0.07041586	0.08094726	0.08771216	0.10530130
50	0.05885334	0.06900562	0.07997636	0.08740066	0.10322870
52	0.05812621	0.06790056	0.07868690	0.08542359	0.10018370
54	0.05701571	0.06700028	0.07751005	0.08471409	0.09968906
56	0.05641871	0.06645219	0.07667539	0.08326136	0.09803670
58	0.05620646	0.06568453	0.07602575	0.08298576	0.09811987
60	0.05547861	0.06507206	0.07501427	0.08146767	0.09538585
62	0.05477240	0.06429563	0.07405968	0.08043142	0.09470463
64	0.05407406	0.06343794	0.07315642	0.07955711	0.09388334
66	0.05324885	0.06250012	0.07227847	0.07908000	0.09303219
68	0.05327269	0.06200124	0.07185358	0.07853388	0.09251357
70	0.05233459	0.06191553	0.07107849	0.07770639	0.09100428
72	0.05183409	0.06085903	0.07047978	0.07671331	0.09035894
74	0.05137870	0.06010971	0.06968919	0.07587511	0.08932303
76	0.05082257	0.05965792	0.06904234	0.07538921	0.08967134
78	0.05047740	0.05885942	0.06785536	0.07405992	0.08660457
80	0.05015811	0.05871392	0.06764287	0.07348275	0.08602798
82	0.04969146	0.05787970	0.06705310	0.07292822	0.08696433
84	0.04908141	0.05762780	0.06664362	0.07230977	0.08626657
86	0.04866419	0.05700095	0.06585378	0.07161463	0.08391688
88	0.04831263	0.05651649	0.06494609	0.07058197	0.08288676
90	0.04790736	0.05618464	0.06504810	0.071114151	0.08273201
92	0.04748360	0.05581743	0.06445389	0.07060955	0.08295625
94	0.04713609	0.05507784	0.06375312	0.06958617	0.08268798
96	0.04669851	0.05457542	0.06312189	0.06915120	0.08121034
98	0.04639573	0.05454035	0.06286721	0.06885385	0.08129521
100	0.04602707	0.05389418	0.06232611	0.06745192	0.07880456

Tabla A9. Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2D_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimados por máxima verosimilitud.

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.3	30	0.06554092	0.07839654	0.09125287	0.10013100	0.11605060
	40	0.05712201	0.06787485	0.07988086	0.08764309	0.10261720
	50	0.05135121	0.06121313	0.07159705	0.07825763	0.09315506
	60	0.04695408	0.05620642	0.06579467	0.07185449	0.08450990
	70	0.04324214	0.05156654	0.06062362	0.06665552	0.07930524
	80	0.04080294	0.04866255	0.05716267	0.06283611	0.07315955
	90	0.03845046	0.04632275	0.05450520	0.05938973	0.06976092
	100	0.03679260	0.04392714	0.05155656	0.05640195	0.06567236

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.4	30	0.07492033	0.08939419	0.10399930	0.11336750	0.13149640
	40	0.06555598	0.07828189	0.09158551	0.09988022	0.11718760
	50	0.05890275	0.07041285	0.08190860	0.09028952	0.10756110
	60	0.05361714	0.06408352	0.07456619	0.08172221	0.09665109
	70	0.04971424	0.05930321	0.06947209	0.07546714	0.08914981
	80	0.04666878	0.05557873	0.06531906	0.07131449	0.08443504
	90	0.04420637	0.05302428	0.06196194	0.06797065	0.07970455
	100	0.04211932	0.05009624	0.05880995	0.06440276	0.07613880

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.5	30	0.08332560	0.09894693	0.11552610	0.12590135	0.14457190
	40	0.07286224	0.08629433	0.10025890	0.10946660	0.12939310
	50	0.06536296	0.07765633	0.09064961	0.09905860	0.11756120
	60	0.05970296	0.07042252	0.08227414	0.09025711	0.10728110
	70	0.05512517	0.06574583	0.07665023	0.08394290	0.09905511
	80	0.05150305	0.06159311	0.07177674	0.07894629	0.09280529
	90	0.04922765	0.05834365	0.06844764	0.07490747	0.08828905
	100	0.04654834	0.05532858	0.06480965	0.07070656	0.08265320

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.6	30	0.09012540	0.10736000	0.12465230	0.13605130	0.15913490
	40	0.07892487	0.09324109	0.10834820	0.11771110	0.13943480
	50	0.07069696	0.08367721	0.09726882	0.10693890	0.12636690
	60	0.06476146	0.07658027	0.08924203	0.09733346	0.11522100
	70	0.05999994	0.07103818	0.08280125	0.09093644	0.10604370
	80	0.05610517	0.06658718	0.07774435	0.08517035	0.09957795
	90	0.05342584	0.06343202	0.07398040	0.08085112	0.09505862
	100	0.05058823	0.05995057	0.06982802	0.07618616	0.08932824

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.7	30	0.09641553	0.11414990	0.13253060	0.14380230	0.16710730
	40	0.08386164	0.09865109	0.11443160	0.12430290	0.14651080
	50	0.07493959	0.08884786	0.10288240	0.11292770	0.13351310
	60	0.06878798	0.08131667	0.09440881	0.10327930	0.11844350
	70	0.06371203	0.07549795	0.08801900	0.09644109	0.11219200
	80	0.05986849	0.07068272	0.08221575	0.09042627	0.10578690
	90	0.05684214	0.06746021	0.07839230	0.08573720	0.10102160
	100	0.05394924	0.06347464	0.07399177	0.08102080	0.09559405

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.8	30	0.10132260	0.11906140	0.13805420	0.14964500	0.1743260
	40	0.08801988	0.10414480	0.12011520	0.13113980	0.1530599
	50	0.07899081	0.09291744	0.10825890	0.11775140	0.1395404
	60	0.07227021	0.08532875	0.09845236	0.10759940	0.1260216
	70	0.06704747	0.07914151	0.09179987	0.10012890	0.1159479
	80	0.06250363	0.07417851	0.08605661	0.09415382	0.1105713
	90	0.05986298	0.07073459	0.08221984	0.08927614	0.1058861
	100	0.05664691	0.06677496	0.07717203	0.08450521	0.0997428

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.9	30	0.10462220	0.12358280	0.14249480	0.15529310	0.18095650
	40	0.09103751	0.10715500	0.12413340	0.13545670	0.15600270
	50	0.08204610	0.09631087	0.11162570	0.12229790	0.14343350
	60	0.07505499	0.08876611	0.10252850	0.11164590	0.12967840
	70	0.06947969	0.08214765	0.09474467	0.10307150	0.12088610
	80	0.06501296	0.07678387	0.08908581	0.09711977	0.11365280
	90	0.06196555	0.07309590	0.08463212	0.09260503	0.10784450
	100	0.05893719	0.06873328	0.07973373	0.08739728	0.10300260

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
1	30	0.10789250	0.12670250	0.14626070	0.16016430	0.18496540
	40	0.09375328	0.10990720	0.12692250	0.13830300	0.16213680
	50	0.08436030	0.09885475	0.11393070	0.12446580	0.14622900
	60	0.07680951	0.09070278	0.10457120	0.11519240	0.13239640
	70	0.07121445	0.08401567	0.09726730	0.10492960	0.12302110
	80	0.06681899	0.07894304	0.09125805	0.09923090	0.11589580
	90	0.06352478	0.07457711	0.08648791	0.09428508	0.11053170
	100	0.06021489	0.07069531	0.08158317	0.08923449	0.10475760

Tabla A10 Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2DSP_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimados por máxima verosimilitud.

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.3	30	0.04624866	0.05695123	0.06774189	0.07437793	0.09004259
	40	0.04261291	0.05226600	0.06214484	0.68875010	0.08253507
	50	0.04043973	0.04896121	0.05777779	0.06381212	0.07610149
	60	0.03817986	0.04623292	0.05432920	0.06014438	0.07101244
	70	0.03617487	0.04379613	0.05172385	0.05683561	0.06851646
	80	0.03495508	0.04213751	0.04981100	0.05461799	0.06483442
	90	0.03369179	0.04074496	0.04802079	0.05279904	0.06247816
	100	0.03277173	0.03953107	0.04620771	0.05056352	0.05972350

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.4	30	0.04989568	0.06119555	0.07213318	0.07959468	0.09485881
	40	0.04629954	0.05614280	0.06622224	0.07276033	0.08683587
	50	0.04370314	0.05237276	0.06169846	0.06786699	0.08080578
	60	0.04089032	0.04902335	0.05765781	0.06354563	0.07607924
	70	0.03858401	0.04650937	0.05460457	0.06011325	0.07076983
	80	0.03722987	0.04475156	0.05244000	0.05801022	0.06855996
	90	0.03591029	0.04327775	0.05079502	0.05557495	0.06541475
	100	0.03474591	0.04173147	0.04880165	0.05341800	0.06400477

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.5	30	0.05338120	0.06499682	0.07630355	0.08358592	0.09733129
	40	0.04900866	0.05907668	0.06930443	0.07621820	0.09133491
	50	0.04583847	0.05512714	0.06476082	0.07113751	0.08462174
	60	0.04301943	0.05135424	0.06013862	0.06617301	0.07943740
	70	0.04062260	0.04869807	0.05737381	0.06324138	0.07495806
	80	0.03888496	0.04661178	0.05500731	0.06052852	0.07154636
	90	0.03775296	0.04510991	0.05298278	0.05824410	0.06833749
	100	0.03618635	0.04342464	0.05046226	0.0555823	0.06666790

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.6	30	0.05639906	0.06802982	0.07961237	0.08690928	0.10203180
	40	0.05158923	0.06174333	0.07205445	0.07920395	0.09432250
	50	0.04791763	0.05733352	0.06700089	0.07379851	0.08731256
	60	0.04502712	0.05366371	0.06275662	0.06832529	0.08118712
	70	0.04244443	0.05075647	0.05972145	0.06532701	0.07692133
	80	0.04062289	0.04843406	0.05712537	0.06251261	0.07417580
	90	0.03931204	0.04691737	0.06006310	0.07107889	0.07107889
	100	0.03772985	0.04493882	0.05220945	0.05746818	0.06912966

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.7	30	0.05907864	0.07106008	0.08283737	0.09016610	0.10563300
	40	0.05368325	0.64191410	0.07476567	0.08218631	0.09683533
	50	0.04992185	0.05932164	0.06941755	0.07667609	0.08935032
	60	0.04684911	0.05566109	0.06492020	0.07071076	0.08370411
	70	0.04414873	0.05257415	0.06170717	0.06758788	0.07861066
	80	0.04214597	0.04999133	0.05851016	0.06434132	0.07648150
	90	0.04064887	0.04839955	0.56352370	0.06175226	0.07249613
	100	0.03889557	0.04637486	0.05400972	0.05931418	0.07141618

p	N	DSP. 50%	DSP. 75%	DSP. 90%	DSP. 95%	DSP. 99%
0.8	30	0.06179655	0.07365887	0.08545689	0.09349958	0.10955640
	40	0.05610030	0.66711840	0.07777161	0.08489686	0.10011700
	50	0.05196492	0.06168696	0.07167088	0.07894649	0.09157256
	60	0.04859838	0.05742619	0.06690938	0.07321643	0.08673538
	70	0.04574380	0.54478460	0.06329044	0.06902751	0.08096136
	80	0.43756560	0.05165504	0.06023429	0.06596561	0.78827870
	90	0.04222208	0.04999550	0.05793393	0.06326794	0.07419478
	100	0.04041234	0.04770302	0.05560361	0.06056025	0.07239734

p	N	DSP. 50%	DSP. 75%	DSP. 90%	DSP. 95%	DSP. 99%
0.9	30	0.06475438	0.07700394	0.08878499	0.09680218	0.11209460
	40	0.05858082	0.06926048	0.08038780	0.08784933	0.10140530
	50	0.05417003	0.06401288	0.07436421	0.08101015	0.09487875
	60	0.05091638	0.06003823	0.06922631	0.07570178	0.08825060
	70	0.04769186	0.05615995	0.06534381	0.07125443	0.08466885
	80	0.04553579	0.05362247	0.06212951	0.06817915	0.08001860
	90	0.04375807	0.05145796	0.05936514	0.06492099	0.07695552
	100	0.04170991	0.04915556	0.05711096	0.06266205	0.07472339

p	N	DSP. 50%	DSP. 75%	DSP. 90%	DSP. 95%	DSP. 99%
1	30	0.06978629	0.08260007	0.09514637	0.10368560	0.12163770
	40	0.06347134	0.07462488	0.08662914	0.09405036	0.10890300
	50	0.05910864	0.06944757	0.08008134	0.08716407	0.10118730
	60	0.05548811	0.06522327	0.07558177	0.08205632	0.09696756
	70	0.05226712	0.06140131	0.07046390	0.07695307	0.09017300
	80	0.04997105	0.05850833	0.06750222	0.07397759	0.08734435
	90	0.04801292	0.05630309	0.06476412	0.07042448	0.08417201
	100	0.04591215	0.05382121	0.06200654	0.06772509	0.08113251

Tabla A11 Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2D_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimadores de A. K. Gupta.

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.1	30	0.03179233	0.03751475	0.04500117	0.05045102	0.05525624
	40	0.02870337	0.03531870	0.04565637	0.05733452	0.08218088
	50	0.02674090	0.03289389	0.04324124	0.05639865	0.09062714
	60	0.02512938	0.03116492	0.04273971	0.05461016	0.08861129
	70	0.02343939	0.02926229	0.03989352	0.05210249	0.08221143
	80	0.02249673	0.02795613	0.03816231	0.04989665	0.07956308
	90	0.02132948	0.02657212	0.03644056	0.04771622	0.07701907
	100	0.02048456	0.02550512	0.03439846	0.04503847	0.07422582

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.2	20	0.05662530	0.06863227	0.08473379	0.10477820	0.14649540
	30	0.04885881	0.05999935	0.07810718	0.10030130	0.16154010
	40	0.04394450	0.05411019	0.07161200	0.09099123	0.14139970
	50	0.03997722	0.04952441	0.06441065	0.08150939	0.12295520
	60	0.03704390	0.04573774	0.05946182	0.07449861	0.11513150
	70	0.03460168	0.04311472	0.05643612	0.07013943	0.10819690
	80	0.03251085	0.04015660	0.05207847	0.06598558	0.09805852
	90	0.03098070	0.03875951	0.05053077	0.06223856	0.09171764
	100	0.02934825	0.03651168	0.04654447	0.05665906	0.08374863

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.3	10	0.09106121	0.10811020	0.11911570	0.13017170	0.14085400
	20	0.07215873	0.08842918	0.11221670	0.13826180	0.20114970
	30	0.06144659	0.07449983	0.09497071	0.11730940	0.17596180
	40	0.05441841	0.06682498	0.08472068	0.10435840	0.15504100
	50	0.04954795	0.06082201	0.07762990	0.09445864	0.14039410
	60	0.04562927	0.05578365	0.06942257	0.08394416	0.12556090
	70	0.04260710	0.05224826	0.06494583	0.07702881	0.11135610
	80	0.04004040	0.04909969	0.06201219	0.07439592	0.10844500
	90	0.03796275	0.04677209	0.05904412	0.07108210	0.10300970
	100	0.03614120	0.04429955	0.05501125	0.06446594	0.09354975

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.4	10	0.10836340	0.13015000	0.15669500	0.17737900	0.23326430
	20	0.08345435	0.10143240	0.12485050	0.14955630	0.21833930
	30	0.07130898	0.08678747	0.10740150	0.12861610	0.18275740
	40	0.06242727	0.07639242	0.09448301	0.11148680	0.15812750
	50	0.05663609	0.06867841	0.08475633	0.10013140	0.14229350
	60	0.05189376	0.06345576	0.07790001	0.09067128	0.12707850
	70	0.04844483	0.05861529	0.07166584	0.08219180	0.11583420
	80	0.04558139	0.05537478	0.06754015	0.07889493	0.10996700
	90	0.04333829	0.05262409	0.06444794	0.07441355	0.10071680
	100	0.04107680	0.04962920	0.06075527	0.07028655	0.09733589

p	N	D. 50%	D. 75%	D. 90%	D. 95%	D. 99%
0.5	10	0.12378460	0.14821060	0.17545310	0.20038210	0.27065390
	20	0.09432777	0.11341550	0.13778030	0.16105420	0.22577280
	30	0.07923133	0.09506291	0.11522970	0.13500280	0.18915330
	40	0.06934734	0.08368423	0.10116880	0.11721980	0.15954860
	50	0.06248681	0.07499336	0.09052238	0.10307860	0.13784220
	60	0.05735044	0.06898929	0.08312328	0.09583128	0.12947200
	70	0.05375223	0.06423475	0.07730985	0.08761714	0.11763970
	80	0.05022904	0.06044922	0.07186474	0.08143924	0.10948460
	90	0.04758799	0.05733875	0.06887983	0.07875602	0.10301860
	100	0.04512178	0.05449473	0.06534837	0.07355213	0.09873085

p	N	D.50%	D.75%	D.90%	D.95%	D.99%
0.6	10	0.13616420	0.16202980	0.18981600	0.21300480	0.26934550
	20	0.10221860	0.12203900	0.14445080	0.16223510	0.21389100
	30	0.08519972	0.10182310	0.12038810	0.13413440	0.17772150
	40	0.07487605	0.08940780	0.10574650	0.11879720	0.15348110
	50	0.06746642	0.08050230	0.09579980	0.10584500	0.13433250
	60	0.06223085	0.07413102	0.08796577	0.09728920	0.12371680
	70	0.05811107	0.06938432	0.08168583	0.09120029	0.11598510
	80	0.05406242	0.06471548	0.07658332	0.08544459	0.10889060
	90	0.05141626	0.06142483	0.07282217	0.08116952	0.10121990
	100	0.04871089	0.05818320	0.06897461	0.07695018	0.09531775

p	N	D.50%	D.75%	D.90%	D.95%	D.99%
0.7	10	0.14716190	0.17412490	0.20317150	0.22300030	0.26654920
	20	0.10949340	0.12921250	0.15152630	0.16609960	0.19994630
	30	0.09100972	0.10739880	0.12515140	0.13739920	0.16949170
	40	0.07958103	0.09439871	0.10958940	0.12000140	0.14572070
	50	0.07154895	0.08492687	0.09901663	0.10847560	0.12985360
	60	0.06596015	0.07812879	0.09041931	0.09887916	0.11914940
	70	0.06128912	0.07243010	0.08455265	0.09227409	0.11092900
	80	0.05746511	0.06793638	0.07938147	0.08643434	0.10406340
	90	0.05423469	0.06423060	0.07480698	0.08255286	0.09793524
	100	0.05191021	0.06147963	0.07083440	0.07770940	0.09265631

p	N	D.50%	D.75%	D.90%	D.95%	D.99%
0.8	10	0.15620600	0.18373220	0.21190330	0.23006000	0.26525760
	20	0.11487890	0.13571090	0.15613020	0.16959870	0.19756340
	30	0.09594460	0.11213100	0.12933900	0.14050230	0.16437700
	40	0.08300616	0.09775187	0.11252860	0.12273120	0.14288550
	50	0.07505463	0.08819594	0.10184910	0.11163470	0.13007930
	60	0.06890889	0.08140032	0.09443191	0.10311690	0.12042470
	70	0.06436653	0.07564967	0.08725321	0.09457397	0.11027270
	80	0.06047024	0.07107531	0.08189284	0.08885106	0.10295610
	90	0.05667116	0.06698912	0.07760976	0.08423209	0.09829013
	100	0.05396553	0.06374695	0.07384675	0.08014586	0.09251471

p	N	D.50%	D.75%	D.90%	D.95%	D.99%
0.9	10	0.16493080	0.19435380	0.22515980	0.24673530	0.28590770
	20	0.12041710	0.14141110	0.16322090	0.17837370	0.20568440
	30	0.10044530	0.11843000	0.13627680	0.14880300	0.17381880
	40	0.08699239	0.10221650	0.11730990	0.12731750	0.14864370
	50	0.07836684	0.09213278	0.10631020	0.11547870	0.13587070
	60	0.07213787	0.08485072	0.09857897	0.10624960	0.12386470
	70	0.06712899	0.07887207	0.09080129	0.09868414	0.11491560
	80	0.06281926	0.07342428	0.08517555	0.09271682	0.10829280
	90	0.05934046	0.06918516	0.07968299	0.08694883	0.10125830
	100	0.05665327	0.06627376	0.07636095	0.08245295	0.09558401

p	N	D.50%	D.75%	D.90%	D.95%	D.99%
1	10	0.17695280	0.20940510	0.24384360	0.26598970	0.31045930
	20	0.12986600	0.15365980	0.17896750	0.19454940	0.22693120
	30	0.10729380	0.12638660	0.14646560	0.15948750	0.18518960
	40	0.09360615	0.10993810	0.12730460	0.13958440	0.16233640
	50	0.08373266	0.09886865	0.11423490	0.12560480	0.14701200
	60	0.07685461	0.09023026	0.10490910	0.11480050	0.13312520
	70	0.07175154	0.08406630	0.09766116	0.10628110	0.12376460
	80	0.06699629	0.07886848	0.09126451	0.09980545	0.11471550
	90	0.06333202	0.07446676	0.08598552	0.09319683	0.11000490
	100	0.06037169	0.07096567	0.08208819	0.08933813	0.10429840

Tabla A12 Percentiles de la distribución del estadístico ${}_2DSP_{n,N}^*$ para una muestra censurada de una distribución normal de parámetros desconocidos y estimadores de A. K. Gupta.

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.1	30	0.01895964	0.02625512	0.03048066	0.03593125	0.04064649
	40	0.02189788	0.02970735	0.03864705	0.04585168	0.06834817
	50	0.02325393	0.03048258	0.04016517	0.04804095	0.07711394
	60	0.02332032	0.03119235	0.04068302	0.04843599	0.07638092
	70	0.02310180	0.03063897	0.03965680	0.04739451	0.07166532
	80	0.02320957	0.03030873	0.03869319	0.04665151	0.06995285
	90	0.02277898	0.02946926	0.03811715	0.04519216	0.06839053
	100	0.02256008	0.02905427	0.03711538	0.04413656	0.06627590

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.2	20	0.03148603	0.04211387	0.05426266	0.06289875	0.09180278
	30	0.03312775	0.04369728	0.05690142	0.06799316	0.10667190
	40	0.03303843	0.04304528	0.05460991	0.06467062	0.09521727
	50	0.03212100	0.04121884	0.05215390	0.06042226	0.08415835
	60	0.03145400	0.03963562	0.04989026	0.05719314	0.07982143
	70	0.03039570	0.03830647	0.04760161	0.05523410	0.07629963
	80	0.02946132	0.03665337	0.04544620	0.05233009	0.06978902
	90	0.02887088	0.03584102	0.04376123	0.04994445	0.06591158
	100	0.02775925	0.03424251	0.04160722	0.04701790	0.06229056

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.3	10	0.03242169	0.04576007	0.05388417	0.05710026	0.06568705
	20	0.04123640	0.05472396	0.07039081	0.08297689	0.11742730
	30	0.04029747	0.05186105	0.06580054	0.07620451	0.10702140
	40	0.03871023	0.04884194	0.06084172	0.07003989	0.09586033
	50	0.03700096	0.04638467	0.05706631	0.06519832	0.08877492
	60	0.03566098	0.04415882	0.05339853	0.06041605	0.08007011
	70	0.03418889	0.04195594	0.05055379	0.05689757	0.07346914
	80	0.03280213	0.04041412	0.04852548	0.05487708	0.07091090
	90	0.03186486	0.03899376	0.04662825	0.05262023	0.06755638
	100	0.03057673	0.03746237	0.04462468	0.04998603	0.06256706

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.4	10	0.04497519	0.06009245	0.07785608	0.08925664	0.11817900
	20	0.04743733	0.06086741	0.07714351	0.08903061	0.12501320
	30	0.04545147	0.05734246	0.07103851	0.08185433	0.10756350
	40	0.04274822	0.05301575	0.06451408	0.07378516	0.09664148
	50	0.04044809	0.04984696	0.06008893	0.06765957	0.08656716
	60	0.03835743	0.04685040	0.05635908	0.06233016	0.07938645
	70	0.03672907	0.04469499	0.05302861	0.05905309	0.07394056
	80	0.03534962	0.04281395	0.05091331	0.05695720	0.07000983
	90	0.03404286	0.04109894	0.04883623	0.05405143	0.06594863
	100	0.03272798	0.03940010	0.04702707	0.05201451	0.06340967

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.5	10	0.05417906	0.0706996	0.09162557	0.1051906	0.14275410
	20	0.05296941	0.06740653	0.08368795	0.09617137	0.13237940
	30	0.04938129	0.06099944	0.07444277	0.08476375	0.11326880
	40	0.04609789	0.05630216	0.06801039	0.07643165	0.09838855
	50	0.04302622	0.05219559	0.06236060	0.07012923	0.08851173
	60	0.04061779	0.0491183	0.05836824	0.06499368	0.08201576
	70	0.03912562	0.04702499	0.05593868	0.06221075	0.07582608
	80	0.03700326	0.04482728	0.05330591	0.05956269	0.07218136
	90	0.03575614	0.04307517	0.05082942	0.05618008	0.06840275
	100	0.03460964	0.04158892	0.04876449	0.05362777	0.06447975

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.6	10	0.06111461	0.07957771	0.09946514	0.11478380	0.15217130
	20	0.05735863	0.07154521	0.08735519	0.09972224	0.13089050
	30	0.05249372	0.06437668	0.07699241	0.08660024	0.11292580
	40	0.04860474	0.05904697	0.07049514	0.07899061	0.09912265
	50	0.04546023	0.05501621	0.06518566	0.07173009	0.08842643
	60	0.04297173	0.05161177	0.06106348	0.06762456	0.08102967
	70	0.04082923	0.04892215	0.05806288	0.06426270	0.07779046
	80	0.03911003	0.04695068	0.05534166	0.06103915	0.07375319
	90	0.03751417	0.04503089	0.05308935	0.05845847	0.07028722
	100	0.03624474	0.04337273	0.05122051	0.05632796	0.06671660

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.7	10	0.06825642	0.08737713	0.10815380	0.12361240	0.16082840
	20	0.06191107	0.07601707	0.09212743	0.10294370	0.12889350
	30	0.05608674	0.06776407	0.08041522	0.08931872	0.11313280
	40	0.05138101	0.06202673	0.07309452	0.08075505	0.09938154
	50	0.04780896	0.05745333	0.06769626	0.07493708	0.08925302
	60	0.04504034	0.05386796	0.06337081	0.07020737	0.08341408
	70	0.04275314	0.05094502	0.05966982	0.06585188	0.07903866
	80	0.04067527	0.04900753	0.05743707	0.06268783	0.07500906
	90	0.03920147	0.04667206	0.05504579	0.06006459	0.07159218
	100	0.03786346	0.04483135	0.05233147	0.05768781	0.06953134

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.8	10	0.07474778	0.09357633	0.11434150	0.12904200	0.16014560
	20	0.06615192	0.08079811	0.09607931	0.10754060	0.13284840
	30	0.05924129	0.07141589	0.08365874	0.09212902	0.11244910
	40	0.05393836	0.06452210	0.07565214	0.08337550	0.10196700
	50	0.05034060	0.06005141	0.07012611	0.07700953	0.09185231
	60	0.04741409	0.05706409	0.06622202	0.07263729	0.08840903
	70	0.04493424	0.05340993	0.06253009	0.06860891	0.08150827
	80	0.04268146	0.05090766	0.05936762	0.06564893	0.07873996
	90	0.04079275	0.04851393	0.05652276	0.06202192	0.07434041
	100	0.03926221	0.04656117	0.05449356	0.05981715	0.07011892

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
0.9	10	0.08136850	0.10018750	0.12065460	0.13513400	0.16261660
	20	0.07088138	0.08516805	0.09996647	0.11040980	0.13091970
	30	0.06336739	0.07553460	0.08821127	0.09690091	0.11348650
	40	0.05755362	0.06838267	0.07974185	0.08713057	0.10404880
	50	0.05323167	0.06372982	0.07422658	0.08086164	0.09794913
	60	0.05001303	0.05944312	0.06938152	0.07613552	0.09071111
	70	0.04738740	0.05632065	0.06530717	0.07187366	0.08450001
	80	0.04536777	0.05361145	0.06227547	0.06850887	0.08091308
	90	0.04321238	0.05109941	0.05934453	0.06546213	0.07701620
	100	0.04152167	0.04912402	0.05672614	0.06217079	0.07411057

p	N	DSP.50%	DSP.75%	DSP.90%	DSP.95%	DSP.99%
1	10	0.09070278	0.11144420	0.13198650	0.14504803	0.17232520
	20	0.07877774	0.09383539	0.10887770	0.11879960	0.13814970
	30	0.06984319	0.08265492	0.09549958	0.10372970	0.12033640
	40	0.06360846	0.07513483	0.08731333	0.09445366	0.10965740
	50	0.05913832	0.06951419	0.08054313	0.08784739	0.10293500
	60	0.05529001	0.06498563	0.07520137	0.08238716	0.09704023
	70	0.05241274	0.06178953	0.07119617	0.07780341	0.09071788
	80	0.05032336	0.05896460	0.06803645	0.07429844	0.08661827
	90	0.04802622	0.05630876	0.06510453	0.07099778	0.08461679
	100	0.04625319	0.05415585	0.06260573	0.06860755	0.08073809

Apéndice 2

Programas de Computación escritos en lenguaje S.

Se incluyen a continuación la mayoría de los programas utilizados en nuestro trabajo. Los programas han sido divididos por capítulo para que resulte más fácil su empleo.

Se aclara que si bien muchos de los programas son generales algunos consideran sólo ciertos tamaños muestrales (como 10, 20, 40 o 100) pero son fácilmente adaptables a otros tamaños de muestra que podrían surgir en un caso concreto de aplicación en cuyo caso se tendrán que adaptar las sentencias propuestas y/o incluir los percentiles correspondientes. Esto se aplica en particular a los gráficos *QQ*, *PP* y *DSP*, ya que se ha incluido el trazado de bandas de confianza por lo que se debió incluir los correspondientes percentiles para cada tamaño de muestra considerado. Si se excluyen las bandas pueden realizarse para cualquier tamaño muestral.

También se quiere aclarar que si bien en algunos casos pueden existir funciones en S-plus que resuelven ciertos problemas con sentencias o programas ya incorporados, en ciertos casos se amplió la forma en que dicho software encara el problema(ejemplo el *QQ*-plot al que se le agregaron bandas), en otros casos no existen en S-plus hasta donde se sabe funciones que realicen lo que se ha programado en esta tesis(ejemplo el *DSP*-plot) y en otros casos ha resultado más rápido y fácil desarrollar el programa respectivo para que realice algo específico que indagar entre las sentencias y programas del S-plus.

Como sucede en todo programa de computación lo que se presenta es una forma de resolver un problema que seguramente otro programador resolvería de modo diferente.

Programas correspondientes al Capítulo 2

Programa 2.1

Calcula los percentiles de la distribución de los estadísticos D y DSP bajo H_0 : la muestra proviene de una distribución completamente especificada.

```
set.seed(8)
nmuestra<-10
nrep<-10000
while(nmuestra<102)
{
  DSP11<-rep(0,nrep)
  D11<-rep(0,nrep)
  vector11<-rep(0,nmuestra)
  vector22<-rep(0,nmuestra)
  vecunif2<-rep(0,nmuestra)
  ui<-rep(0,nmuestra)
  jota<-seq(1:nmuestra)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra

  for( i in 1:nrep)
  {
    vecunif2<-sort(runif(nmuestra))
    ui<-vecunif2
    vector22<-(2/pi)*asin((ti)^0.5)
    vector11<-(2/pi)*asin((vecunif2)^0.5)
    D11[i]<-max(abs(ti-ui))+(0.5/nmuestra)
    DSP11[i]<-max(abs(vector11-vector22))
  }
  print(unlist(list("n"=nmuestra,"D"=
    quantile(D11,c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
  print(unlist(list("n"=nmuestra," DSP"=
    quantile(DSP11,c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
  nmuestra<-nmuestra+2
}
```

Funciones “hasta donde”, “hasta donde igual” y “hasta donde bajo” que se utilizan en los programas siguientes.

Las primeras dan la posición hasta donde los valores de un vector ordenado son menores que un valor (o menores o iguales a un valor) y no son NA, el vector debe estar ordenado y los NA deben estar al final del vector.

La tercera se emplea en un vector donde los NA están al principio del mismo y luego sus elementos están ordenados en forma creciente, da la posición a partir de la cual los elementos son mayores que un valor y distintos que NA.

```
hastadonde<-function(vec,jota)
{
  ene<-length(vec)
  i<-1
  hastadonde<-0
  while(vec[i]<jota && vec[i]!="NA")
  {
    hastadonde<-i
    i<-i+1
  }
  hastadonde
}
```

```

hastadondebajo<-function(vec,jota)
{
  #aca los NA deben estar primero y el vector ordenado
  ene<-length(vec)
  i<-ene
  hastadondebajo<-0
  while(i>0 && vec[i]>jota && vec[i]!= "NA" )
  {
    hastadondebajo<-i
    i<-i-1
  }
hastadondebajo
}

```

```

hastadondeigual<-function(vec,jota)
{
  ene<-length(vec)
  i<-1
  hastadondeigual<-0
  while(vec[i]<= jota && vec[i]!= "NA")
  {
    hastadondeigual<-i
    i<-i+1
  }
hastadondeigual
}

```

Program 2.2

Hace el gráfico DSP de una muestra de una distribución completamente especificada con bandas de aceptación al 95%.

```

graficoDSPplotUniforme<-function(mimuestra)
{
  vec<-mimuestra
  ene<-length(vec)
  if( ene==10)percentiles<-c(0.409645,0.258836)#al 5%
  else if( ene==20)percentiles<-c(0.29583,0.20142)
  else if( ene==30)percentiles<-c(0.24316,0.16783)
  else if( ene==40)percentiles<-c(0.21098,0.14884)
  else if( ene==100)percentiles<-c(0.13392,0.09816)
  else stop("no se puede con esa longitud de vector")
  D11<-0
  DSP11<-0
  vector11<-rep(0,ene)
  vector22<-rep(0,ene)
  punto<-percentiles[1]-(0.5/ene)
  jota<-seq(ene)
  ti2<-(jota-0.5)/ene
  xsup2<-ti2+percentiles[1]-(0.5/ene)
  xinf2<-ti2-percentiles[1]+(0.5/ene)
  x12<-rep(0,ene)
  x22<-rep(0,ene)
  Cuentore2<-0
  Cuentosp2<-0
  y1<-asin(ti2^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
  for( j in 1:ene)
  {
    if(y1[j]<(pi/2)) x12[j]<-sin(y1[j])^2
    else x12[j]<-1
  }
  y2<-sin(asin(ti2^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
  for( j in 1:ene)
  {
    if(y2[j]>0) x22[j]<-y2[j]^2
    else x22[j]<-0
  }
  x12<-sort(x12)
}

```

```

x22<-sort(x22)
limite1<-hastadondeigual(sort((sin(0.5*pi*ti2)^2+punto)^0.5),1)
y11<-(2/pi)*asin((sin(0.5*pi*ti2[1:limite1])^2+punto)^0.5)
limite2<-hastadondebajo(sort(sin(0.5*pi*ti2)^2-punto),0)
y22<-(2/pi)*asin((sin(0.5*pi*ti2[limite2:ene])^2-punto)^0.5)
familiar<-(sort(vec))
if( any(familiar>xsup2 ) | any(familiar<xinf2)) Cuentore2<-Cuentore2+1
if( any(familiar>x12 ) | any(familiar<x22)) Cuentosp2<-Cuentosp2+1
D11 <-max(abs(ti2-familiar)+(0.5/ene))
vector11<-(2/pi)*asin(familiar^0.5)
vector22<-(2/pi)*asin(ti2^0.5)
DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
junto<-c(ti2,vector22)
junto2<-c(vector11,y11,y22,na.rm=T)
plot(vector22,vector11,pch=2,xlim=c(min(junto),max(junto)),ylim=c(0,max(junto2)),xl
ab=" Prob. teóricas de la U(0,1) transformadas por arcseno", ylab=" Prob. empíricas
de la Muestra transformadas por arcseno")
abline(percentiles[2],1,col=2)
abline(-percentiles[2],1,col=2)
abline(0,1)
points(ti2[1:(limite1)],y11,col=5,pch=".")
points(ti2[limite2:ene],y22,col=5,pch=".")
lines(ti2[limite2:ene],y22,col=5,pch=".")
lines(ti2[1:limite1],y11,col=5,pch=".")
legend(0.01,(0.9),c("Bandas con DSP", "Bandas con D"),fill=c(2,5))
print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al 1%")
print("los valores de D y DSP calculados son")
graficoDSPplotUniforme<-c(D11,DSP11,Cuentore2,Cuentosp2)
graficoDSPplotUniforme
}

```

Programa 2.3

Hace el gráfico PP de una muestra de una distribución completamente especificada con bandas de aceptación al 95%.

```

graficoPPplotUniforme<-function(mimuestra)
{
ene<-length(mimuestra)
if( ene==10)percentiles<-c(0.409645,0.258836)#al 5%
else if( ene==20)percentiles<-c(0.29583,0.20142)
else if( ene==30)percentiles<-c(0.24316,0.16783)
else if( ene==40)percentiles<-c(0.21098,0.14884)
else if( ene==100)percentiles<-c(0.13392,0.09816)
else stop("no se puede con esa longitud de vector")
D11<-0
vector11<-rep(0,ene)
vector22<-rep(0,ene)
x12<-rep(0,ene)
x22<-rep(0,ene)
jota<-seq(ene)
ti2<-(jota-0.5)/ene
xsup2<-ti2+percentiles[1]-(0.5/ene)
xinf2<-ti2-percentiles[1]+(0.5/ene)
Cuentore2<-0
Cuentosp2<-0
y1<-asin(ti2^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:ene)
{
if(y1[j]<(pi/2)) x12[j]<-sin(y1[j])^2
else x12[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti2^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:ene)
{
if(y2[j]>0) x22[j]<-y2[j]^2
else x22[j]<-0
}
}

```

```

x12<-sort(x12)
x22<-sort(x22)
vec<-mimuestra
familiarian<-(sort(vec))
if( any(familiarian>xsup2 ) | any(familiarian<xinf2)) Cuentore2<-Cuentore2+1
if( any(familiarian>x12 ) | any(familiarian<x22)) Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  D11 <-max(abs(ti2-familiarian))+(0.5/ene)
  vector11<-(2/pi)*asin(familiarian^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti2^0.5)
DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
plot(ti2, familiarian, xlim = c(0.02, 1), ylim = c(0, 1), xlab = "Prob. teórica
U(0,1)",ylab="Prob.empírica de la Muestra", pch = 2)
points(ti2, x12, pch = ".", col = 2)
lines(ti2, x12, col = 2)
points(ti2, x22, pch = ".", col = 2)
lines(ti2, x22, col = 2)
points(ti2, xsup2, pch = ".", col = 5)
lines(ti2, xsup2, col = 5)
points(ti2, xinf2, pch = ".", col = 5)
lines(ti2, xinf2, col = 5)
abline(0, 1)
legend(0, (0.97), c("Bandas con DSP", "Bandas con D"),fill=c(2,5))
  print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al 5%")
print("los valores de D y DSP calculados son")
graficoPPplotUniforme <- c(D11, DSP11, Cuentore2, Cuentosp2)
graficoPPplotUniforme
}

```

Programa 2.4

Calcula los estadísticos D y DSP de una muestra de una distribución completamente especificada, puede suponerse entonces de una uniforme $U(0,1)$.

```

calculoDyDSPuni<-function(mimuestra)
{
  #calcula D y DSP de una distribución uniformeU(0,1)
  xmuestra<-sort(mimuestra)
  nmuestra<-length(xmuestra)
  vector11<-(2/pi)*asin(((xmuestra))^0.5)
  jota<-seq(1:nmuestra)
  jotas<-(jota-0.5)/nmuestra
  jota2<-(2/pi)*asin((jotas)^0.5)
  Dcal<-max(abs(jotas-sort((xmuestra))))+(0.5/nmuestra)
  DSPcal<-max(abs(vector11-jota2))
  print("Valor calculado de D   Valor calculado de DSP")
  calculoDyDSPuni<-c(Dcal,DSPcal)
  calculoDyDSPuni
}

```

Programa 2.5

Calcula la potencia de los tests utilizando los estadísticos D y DSP, cuando la alternativa consiste en una distribución de la Familia A.

```

set.seed(8)
k<-10
ka<-1.5
while(k < 41)
{
  nmuestra<-k
  ti<-rep(0,nmuestra)
  jota<-seq(1:nmuestra)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
  x1<-rep(0,nmuestra)
  x2<-rep(0,nmuestra)
  percentiles<-c(0,0)
  if(nmuestra==10)percentiles<-c(0.3674,0.2318)

```



```

else if(nmuestra==20)percentiles<-c(0.2656,0.1803)
else if(nmuestra==40)percentiles<-c(0.19,0.13498)
  xsup<-ti+percentiles[1]-(0.5/nmuestra)
  xinf<-ti-percentiles[1]+(0.5/nmuestra)
  Cuentore<-0
  Cuentosp<-0
  Cuentore2<-0
  Cuentosp2<-0

y1<-asin(ti^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:nmuestra)
{
  if(y1[j]<(pi/2))x1[j]<-sin(y1[j])^2
  else x1[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:nmuestra)
{
  if(y2[j]>0)x2[j]<-y2[j]^2
  else x2[j]<-0
}++
x2<-sort(x2)
x1<-sort(x1)
for( j in 1:10000)
{
  unif1<-sort(runif(nmuestra))
  familian<-sort(1-((1-unif1)^(1/ka)))

vector11<-(2/pi)*asin(familian^0.5)
vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
D11 <-max(abs(ti-familian))+(0.5/nmuestra)
if( any(familian>xsup ) | any(familian<xinf)) Cuentore<-Cuentore+1
if( any(familian>x1 ) | any(familian<x2)) Cuentosp<-Cuentosp+1
  if(DSP11>percentiles[2])Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  if(D11>percentiles[1])Cuentore2<-Cuentore2+1
}
print(unlist(list("n"=nmuestra,"k"=ka,"Rechazos para D"=Cuentore,"Rechazos para
  DSP"=Cuentosp)))
print(unlist(list("n"=nmuestra,"k"=ka,"Rechazos para D2"=Cuentore2,"Rechazos para
  DSP2"=Cuentosp2)))
if( k< 20)k<-k+10
else k<-k+20
}

```

Programa 2.6

Calcula la potencia de los tests utilizando los estadísticos D y DSP, en la alternativa distribuciones de la Familia B.

```

set.seed(8)
k<-10
ka<-1.5
while(k < 41)
{
  nmuestra<-k
  ti<-rep(0,nmuestra)
  jota<-seq(1:nmuestra)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
  x1<-rep(0,nmuestra)
  x2<-rep(0,nmuestra)
  percentiles<-c(0,0)
  if(nmuestra==10)percentiles<-c(0.3674,0.2318)
  else if(nmuestra==20)percentiles<-c(0.2656,0.1803)
  else if(nmuestra==40)percentiles<-c(0.19,0.13498)
    xsup<-ti+percentiles[1]-(0.5/nmuestra)
    xinf<-ti-percentiles[1]+(0.5/nmuestra)
    Cuentore<-0
    Cuentosp<-0

```

```

Cuentore2<-0
Cuentosp2<-0
familian<-rep(0,nmuestra)
DSP1<-0
D1<-0
y1<-asin(ti^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:nmuestra)
{
  if(y1[j]<(pi/2))x1[j]<-sin(y1[j])^2
  else x1[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:nmuestra)
{
  if(y2[j]>0)x2[j]<-y2[j]^2
  else x2[j]<-0
}
x2<-sort(x2)
x1<-sort(x1)
for( j in 1:10000)
{
  unif1<-sort(runif(nmuestra))
  for( i in 1:nmuestra)
  {
    if(unif[i] < 0.5)familiaa[i] <- 0.5 * ((2 * unif[i])^(1/ka))
    else familiaa[i] <- 1 - ((0.5) * ((2 - 2 * unif[i])^(1/ka)))
  }
  familian<-sort(familian)
  vector1<-(2/pi)*asin(familian^0.5)
  vector2<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
  DSP1<-max(abs(vector1-vector2))
  D1 <-max(abs(ti-familian))+(0.5/nmuestra)
  if( any(familian>xsup ) | any(familian<xinf)) Cuentore<-Cuentore+1
  if( any(familian>x1 ) | any(familian<x2)) Cuentosp<-Cuentosp+1
  if(DSP1>percentiles[2])Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  if(D1>percentiles[1])Cuentore2<-Cuentore2+1
}
print(unlist(list("n"=nmuestra,"k"=ka,"Rechazos para D"=Cuentore,"Rechazos para
  DSP"=Cuentosp)))
print(unlist(list("n"=nmuestra,"k"=ka,"Rechazos para D2"=Cuentore2,"Rechazos para
  DSP2"=Cuentosp2)))

if( k< 20)k<-k+10
else k<-k+20
}

```

Programa 2.7

Calcula la potencia de los tests utilizando los estadísticos D y DSP, en la alternativa distribuciones de la Familia C.

```

set.seed(8)
k<-10
ka<-1.5
while(k < 41)
{
  nmuestra<-k
  ti<-rep(0,nmuestra)
  jota<-seq(1:nmuestra)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
  x1<-rep(0,nmuestra)
  x2<-rep(0,nmuestra)
  percentiles<-c(0,0)
  if(nmuestra==10)percentiles<-c(0.3674,0.2318)
  else if(nmuestra==20)percentiles<-c(0.2656,0.1803)
  else if(nmuestra==40)percentiles<-c(0.19,0.13498)
  xsup<-ti+percentiles[1]-(0.5/nmuestra)
  xinf<-ti-percentiles[1]+(0.5/nmuestra)
  Cuentore<-0
  Cuentosp<-0
}

```

```

Cuentore2<-0
Cuentosp2<-0
familiar<-rep(0,nmuestra)
y1<-asin(ti^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:nmuestra)
{
  if(y1[j]<(pi/2))x1[j]<-sin(y1[j])^2
  else x1[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:nmuestra)
{
  if(y2[j]>0)x2[j]<-y2[j]^2
  else x2[j]<-0
}
x2<-sort(x2)
x1<-sort(x1)
for( j in 1:10000)
{
  unif1<-sort(runif(nmuestra))
  for( i in 1:nmuestra)
  {if (unif1[i]<0.5)familiar[i]<- 0.5(1-((1-2*unif1[i])^(1/ka)))
  else familiar[i]<- 0.5(1+((2*unif1[i]-1)^(1/ka)))
  }
  familiar<-sort(familiar)
  vector11<-(2/pi)*asin(familiar^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
  DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
  D11 <-max(abs(ti-familiar))+(0.5/nmuestra)
  if( any(familiar>xsup ) | any(familiar<xinf)) Cuentore<-Cuentore+1
  if( any(familiar>x1 ) | any(familiar<x2)) Cuentosp<-Cuentosp+1
  if(DSP11>percentiles[2])Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  if(D11>percentiles[1])Cuentore2<-Cuentore2+1
}
print(unlist(list("n"=nmuestra,"k"=ka,"Rechazos para D"=Cuentore,"Rechazos para
  DSP"=Cuentosp)))
print(unlist(list("n"=nmuestra,"k"=ka,"Rechazos para D2"=Cuentore2,"Rechazos para
  DSP2"=Cuentosp2)))
if( k< 20)k<-k+10
else k<-k+20
}

```

Programas correspondientes al Capítulo 3

Programa 3.1

Calcula los estadísticos D y DSP para una muestra con censura de tipo I y II a derecha de una distribución completamente especificada. Cuando pprueba=1 no hay censura y se puede usar en este caso también.

```

calculoDDSPcensuraunifIyII<-function(nmuestra,pprueba,mimuestra,tipo)
{
  if(tipo==2)
  { if(nmuestra<length(mimuestra))stop("Problema mal longitud vector o tamaño
    muestra")
    radio<-pprueba
    ereprueba<-radio*nmuestra
    print(ereprueba)
    ti<-rep(0,ereprueba)
    x1<-rep(0,ereprueba)
    x2<-rep(0,ereprueba)
    jota<-seq(1:ereprueba)
    ti<-(jota-0.5)/nmuestra
    vec<-sort(mimuestra)
    vec2<-vec[1:ereprueba]
    vector11<-(2/pi)*asin(vec2^0.5)
    vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
  }
}

```

```

Dcal<-max(abs(ti-vec2))+(0.5/nmuestra)
  DSPcal<-max(abs(vector11-vector22))
  print("Valor calculado de D y de DSP censura tipoII")
  calculoDDSPcensuraunif<-c(Dcal,DSPcal)
  calculoDDSPcensuraunif
}
else if(tipo==1)
{
  pprueba<-pprueba
  if(nmuestra<length(mimuestra)) stop("Problema mal longitud vector o tamaño
muestra")
  vecunif1<-sort(mimuestra)
  vecunif2<-vecunif1[vecunif1<pprueba]
  munif<-length(vecunif2)
  print(munif)
  ti<-rep(0,munif)
  x1<-rep(0,munif)
  x2<-rep(0,munif)
  jota<-seq(1:munif)
  vector22<-(jota/nmuestra)-vecunif2
  vector11<-vecunif2-((jota-1)/nmuestra)
  vector33<-pprueba-(munif/nmuestra)
  Dcal<-max(vector11,vector22,vector33)
  vector222<-(2/pi)*asin(((jota-0.5)/nmuestra)^0.5)
  vector111<-(2/pi)*asin(vecunif2^0.5)
  pepe<-(munif-0.5)/nmuestra
  vector333<-((2/pi)*asin(pprueba^0.5))-((2/pi)*asin(pepe^0.5))
  vector333<-abs(vector333)
  DSPcal<-max(abs(vector111-vector222),vector333)
  print("Valor calculado de D y de DSP censura TipoI")
  calculoDDSPcensuraunifI<-c(Dcal,DSPcal)
  calculoDDSPcensuraunifI
}

else stop(" Tipo solo puede ser 1 o 2")
}

```

Programa 3.2

Calcula los percentiles de la distribución de los estadísticos D y DSP bajo H_0 : la muestra con censura de tipo I a la derecha proviene de una distribución completamente especificada.

```

pprueba<-0.1
nrep<-10000
while( pprueba< 1.01)
{
  nmuestra<-5
  for(k in 1:19)
  {
    nmuestra<-nmuestra+5
    DSP11<-rep(0,nrep)
  }
  D11<-rep(0,nrep)
  DSP11<-rep(0,nrep)
  vector11<-rep(0,nmuestra)
  vector22<-rep(0,nmuestra)
  vector33<-rep(0,nmuestra)
  vector111<-rep(0,nmuestra)
  vector222<-rep(0,nmuestra)
  vector333<-rep(0,nmuestra)
  vecunif1<-rep(0,nmuestra)
  vecunif2<-rep(0,nmuestra)
  for( i in 1:nrep)
  {
    vecunif1<-runif(nmuestra)
    vecunif2<-sort(vecunif1[vecunif1<pprueba])
    munif<-length(vecunif2)
    munif<-length(vecunif2)
    jota<-seq(1:munif)
    vector22<-(jota/nmuestra)-vecunif2
  }
}

```

```

        vector11<-vecunif2-((jota-1)/nmuestra)
        vector33<-pprueba-(munif/nmuestra)
D11[i]<-max(vector11,vector22,vector33)
        vector222<-(2/pi)*asin(((jota-0.5)/nmuestra)^0.5)
        vector111<-(2/pi)*asin(vecunif2^0.5)
        pepe<-(munif-0.5)/nmuestra
        vector333<-(2/pi)*asin(pprueba^0.5)-(2/pi)*asin(pepe^0.5))
        vector333<-abs(vector333)
        DSP11[i]<-max(abs(vector111-vector222),vector333)
    }
print(unlist(list("n"=nmuestra,"p"=pprueba,quantile(D11,c(0.5,0.75,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995),na.rm=T))))
print(unlist(list("n"=nmuestra,"p"=pprueba,quantile(DSP11,c(0.5,0.75,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995),na.rm=T))))
print(nmuestra)
}
pprueba<-pprueba+0.1
print(pprueba)
}

```

Programa 3.3

Calcula los percentiles de la distribución de los estadísticos D y DSP bajo H_0 : la muestra con censura de tipo II a la derecha proviene de una distribución completamente especificada.

```

set.seed(8)
pprueba<-0.1
nrep<-10000
while( pprueba< 1.01)
{
    nmuestra<-5
    for(k in 1:20)
    {
        nmuestra<-nmuestra+5
ereprueba<-pprueba*nmuestra
        DSP11<-rep(0,nrep)
D11<-rep(0,nrep)
DSP11<-rep(0,nrep)
vector11<-rep(0,nmuestra)
vector22<-rep(0,nmuestra)
vector33<-rep(0,nmuestra)
vector111<-rep(0,nmuestra)
vector222<-rep(0,nmuestra)
vector333<-rep(0,nmuestra)
vecunif1<-rep(0,nmuestra)
vecunif2<-rep(0,nmuestra)
for( i in 1:nrep)
    {
        vecunif1<-sort(runif(nmuestra))
        vecunif2<-vecunif1[1:ereprueba]
        jota<-seq(1:ereprueba)
        vector22<-(jota/nmuestra)-vecunif2
        vector11<-vecunif2-((jota-1)/nmuestra)
        D11[i]<-max(vector11,vector22)
        vector222<-(2/pi)*asin(((jota-0.5)/nmuestra)^0.5)
        vector111<-(2/pi)*asin(vecunif2^0.5)
        DSP11[i]<-max(abs(vector111-vector222))
    }
print(unlist(list("n"=nmuestra,"p"=pprueba,"D"=quantile(D11,c(0.5,0.75,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995),na.rm=T))))
print(unlist(list("n"=nmuestra,"p"=pprueba,"DSP"=quantile(DSP11,c(0.5,0.75,0.85,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995),na.rm=T))))
print(nmuestra)
}
pprueba<-pprueba+0.1
print(pprueba)
}

```

Programa 3.4

Grafica un PP-plot para una muestra con censura simple de tipo II de una distribución completamente especificada con bandas de aceptación al 95 % y razón de censura del 50%.

```
graficoPPplotUniformeCensura<-function(mimuestra,tamanoriginal)
{
  enegrande<-tamanoriginal
  ene<-length(mimuestra)
  if(enegrande!= (ene/2))stop("el radio no es del 50%)
  # la razón de censura es del 50% y tipo II
  if( enegrande==10)percentiles<-c(0.37178,0.238)#al 5%
  else if( enegrande==20)percentiles<-c(0.270068,0.182)
  else if( enegrande==30)percentiles<-c(0.223824,0.15366)
  else if( enegrande==40)percentiles<-c(0.19362,0.1136809)
  else if( enegrande==100)percentiles<-c(0.127039,0.09128)
  else stop("no se puede con esa longitud de vector")
  D11<-0
  vector11<-rep(0,ene)
  vector22<-rep(0,ene)
  x12<-rep(0,ene)
  x22<-rep(0,ene)
  jota<-seq(ene)
  ti2<-(jota-0.5)/enegrande
  xsup2<-ti2+percentiles[1]-(0.5/enegrande)
  xinf2<-ti2-percentiles[1]+(0.5/enegrande)
  for( i in 1:ene)
  {
    if( xinf2[i]<0)xinf2[i]<-0
    else if (xsup2[i]>1)xsup2[i]<-1
  }
  Cuentore2<-0
  Cuentosp2<-0
  y1<-asin(ti2^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
  for( j in 1:ene)
  {
    if(y1[j]<(pi/2)) x12[j]<-sin(y1[j])^2
    else x12[j]<-1
  }
  y2<-sin(asin(ti2^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
  for( j in 1:ene)
  {
    if(y2[j]>0) x22[j]<-y2[j]^2
    else x22[j]<-0
  }
  x12<-sort(x12)
  x22<-sort(x22)
  vec<-mimuestra
  familiar<-(sort(vec))
  if( any(familiar>xsup2) | any(familiar<xinf2)) Cuentore2<-Cuentore2+1
  if( any(familiar>x12) | any(familiar<x22)) Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  D11 <-max(abs(ti2-familiar))+(0.5/enegrande)
  vector11<-(2/pi)*asin(familiar^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti2^0.5)
  DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
  plot(ti2, familiar, xlim = c(0.02, max(ti2)), ylim = c(min(xinf2),
max(xsup2)), xlab = " Prob. teóricas de la U(0,1)",ylab=" Prob. empíricas de la
muestra con 50% de censura", pch = 2)
  points(ti2, x12, pch = ".", col = 2)
  lines(ti2, x12, col = 2)
  points(ti2, x22, pch = ".", col = 2)
  lines(ti2, x22, col = 2)
  points(ti2, xsup2, pch = ".", col = 5)
  lines(ti2, xsup2, col = 5)
  points(ti2, xinf2, pch = ".", col = 5)
  lines(ti2, xinf2, col = 5)
  abline(0, 1)
  legend(0.02, (0.5), c("Bandas con DSP", "Bandas con D"),fill=c(2,5))
}
```

```

    print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al 5%")
    print("los valores de D y DSP calculados son")
    graficoPPplotUniformeCensura <- c(D11, DSP11, Cuentore2, Cuentosp2)
    graficoPPplotUniformeCensura
}

```

Programas correspondientes al Capítulo 4

Programa 4.1

Calcula percentiles de la distribución de D y de DSP bajo H_0 : la muestra proviene de una distribución normal con parámetros desconocidos.

```

set.seed(8)
nmuestra<-10
nrep<-10000
DSP11<-rep(0,nrep)
D11<-rep(0,nrep)
pprueba<-0.1
while(nmuestra<101)
{
  vector11<-rep(0,nmuestra)
  vector22<-rep(0,nmuestra)
  vecunif2<-rep(0,nmuestra)
  ui<-rep(0,nmuestra)
  jota<-seq(1:nmuestra)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
  for( i in 1:nrep)
  {
    vecunif2<-sort(rnorm(nmuestra))
    ui<-pnorm((vecunif2-mean(vecunif2))/sqrt((nmuestra-
    1)*var(vecunif2))/nmuestra))
    vector22<-(2/pi)*asin((ti)^0.5)
    vector11<-(2/pi)*asin((pnorm((vecunif2-mean(vecunif2))/sqrt((nmuestra-
    1)*var(vecunif2))/nmuestra))^0.5)
    D11[i]<-max(abs(ti-ui))+(0.5/nmuestra)
    DSP11[i]<-max(abs(vector11-vector22))
  }
  print(unlist(list("n"=nmuestra," DSP"=
    quantile(DSP11,c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
  print(unlist(list("n"=nmuestra," D"=
    quantile(D11,c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
  nmuestra<-nmuestra+2
  print(nmuestra)
}

```

Programa 4.2

Calcula los estadísticos D y DSP para una muestra dada según Lilliefors.

```

calculoDyDSP<-function(mimuestra)
{
  #calcula D con estimacion de media y desvio
  xmuestra<-sort(mimuestra)
  xord<-(xmuestra-mean(xmuestra))/stdev(xmuestra)
  nmuestra<-length(xmuestra)
  vector11<-(2/pi)*asin((pnorm(xord))^0.5)
  jota<-seq(1:nmuestra)
  jotass<-(jota-0.5)/nmuestra
  jota2<-(2/pi)*asin((jotass)^0.5)
  Dcal<-max(abs(jotass-sort(pnorm(xord))))+(0.5/nmuestra)
  DSPcal<-max(abs(vector11-jota2))
  print("Valor calculado de D y Valor calculado de DSP")
  print("Valor de media y desvio")
  calculoDyDSP<-c(Dcal,DSPcal,mean(xmuestra),stdev(xmuestra))
  calculoDyDSP
}

```

Programa 4.3.1

Grafico QQ con bandas de aceptación al 95 %, estima parámetros de la muestra usando EMV. Calcula los estadísticos D y DSP y la decisión del test al 5%.

```
graficoQQplot<-function(mimuestra)
{
  vec <- sort(mimuestra)
  ene <- length(vec)
  if(ene == 10) percentiles <- c(0.266684, 0.1461638)
  else if(ene == 20) percentiles <- c(0.1925992, 0.118097)
  else if(ene == 30) percentiles <- c(0.1605957, 0.1045905)
  else if(ene == 40) percentiles <- c(0.13944, 0.09388433)
  else if(ene == 100) percentiles <- c(0.08852421, 0.06745192)
  else stop("no se puede con esa longitud de vector")
  D11 <- 0
  DSP11 <- 0
  vector11 <- rep(0, ene)
  vector22 <- rep(0, ene)
  x12 <- rep(0, ene)
  x22 <- rep(0, ene)
  jota <- seq(ene)
  ti2 <- (jota - 0.5)/ene
  xsup2 <- ti2 + percentiles[1] - (0.5/ene)
  xinf2 <- ti2 - percentiles[1] + (0.5/ene)
  Cuentore2 <- 0
  Cuentosp2 <- 0
  y1 <- asin(ti2^0.5) + 0.5 * pi * percentiles[2]
  for(j in 1:ene) {
    if(y1[j] < (pi/2))
      x12[j] <- sin(y1[j])^2
    else x12[j] <- 1
  }
  y2 <- sin(asin(ti2^0.5) - 0.5 * pi * percentiles[2])
  for(j in 1:ene) {
    if(y2[j] > 0)
      x22[j] <- y2[j]^2
    else x22[j] <- 0
  }
  x12 <- sort(x12)
  x22 <- sort(x22)
  vecmax <- max(vec)
  vecmin <- min(vec)
  vec2 <- (vec - mean(vec))/sqrt(((ene - 1) * var(vec))/ene)
  familian <- pnorm(sort(vec2))
  if(any(familian > xsup2) | any(familian < xinf2))
    Cuentore2 <- Cuentore2 + 1
  if(any(familian > x12) | any(familian < x22))
    Cuentosp2 <- Cuentosp2 + 1
  D11 <- max(abs(ti2 - familian) + (0.5/ene))
  vector11 <- (2/pi) * asin(familian^0.5)
  vector22 <- (2/pi) * asin(ti2^0.5)
  DSP11 <- max(abs(vector11 - vector22))
  ti3 <- seq(min(qnorm(ti2)), max(qnorm(ti2)), 0.01)
  eme <- length(ti3)
  limite1 <- hastadonde(pnorm(ti3) + 0.192 - (0.5/ene), 1)
  limite2 <- hastadondebajo(pnorm(ti3) - 0.192 + (0.5/ene), 0)
  vector13 <- mean(vec) + stdev(vec) * qnorm(pnorm(ti3[1:limite1]) +
    0.192 - (0.5/ene))
  vector23 <- mean(vec) + stdev(vec) * qnorm(pnorm(ti3[limite2:eme]) -
    0.192 + (0.5/ene))
  vector14 <- mean(vec) + stdev(vec) * qnorm(sin(asin(pnorm(ti3)^0.5) +
    0.5 * pi * 0.118)^2)
  vector24 <- mean(vec) + stdev(vec) * qnorm(sin(asin(pnorm(ti3)^0.5) -
    0.5 * pi * 0.118)^2)
  plot(qnorm(ti2), vec, xlim = c(min(qnorm(ti2)), max(qnorm(ti2))),
```



```

      ylim = c(vecmin, vecmax), pch = 2, xlab = "Percentiles teóricos de la
N(0,1)",ylab="Percentiles empiricos de la Muestra")
title("Bandas de aceptacion con D y DSP para el QQ-plot")
abline(mean(vec), stdev(vec))
      limite3 <- hastadonde(vector13, vecmax)
vector133 <- vector13[1:limite3]
limite33 <- hastadondebajo(vector133, vecmin)
points(ti3[limite33:limite3], vector13[limite33:limite3], col = 5,
      pch = ".")
limite4 <- hastadondebajo(vector23, vecmin)
vector233 <- vector23[limite4:length(vector23)]
limite44 <- hastadondeigual(vector233, vecmax)
ti33 <- ti3[limite2:eme]
points(ti3[(limite2 + limite4):(limite2 + limite4 + limite44 - 1)],
      vector23[limite4:(limite44 + limite4 - 1)], col = 5, pch = ".")
    )
limite5 <- hastadondeigual(vector14, vecmax)
limite54 <- hastadondebajo(vector14, vecmin)
points(ti3[limite54:limite5], vector14[limite54:limite5], col = 2,
      pch = ".")
limite6 <- hastadondebajo(vector24, vecmin)
limite66 <- hastadondeigual(vector24, vecmax)
points(ti3[limite6:limite66], vector24[limite6:limite66], col = 2,
      pch = ".")
legend(-2, (0.97) * vecmax, c("Bandas con DSP", "Bandas con D",fill=c(2,5)))
print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al 5%")
print("los valores de D y DSP calculados son")
graficoQQplot <- c(D11, DSP11, Cuentore2, Cuentosp2)
graficoQQplot
}

```

Programa 4.3.2

Realiza el gráfico PP con bandas de aceptación del 95 % y estima los parámetros de la muestra EMV para ciertos tamaños muestrales. Calcula los estadísticos D y DSP y la decisión del test al 5%.

```

graficoPPplot<-function(mimuestra)
{
ene<-length(mimuestra)
if(ene == 10) percentiles <- c(0.266684, 0.1461638)
  else if(ene == 20) percentiles <- c(0.1925992, 0.118097)
  else if(ene == 30) percentiles <- c(0.1605957, 0.1045905)
  else if(ene == 40) percentiles <- c(0.13944, 0.09388433)
  else if(ene == 100) percentiles <- c(0.08852421, 0.06745192)
else stop("no se puede con esa longitud de vector")
D11<-0
vector11<-rep(0,ene)
vector22<-rep(0,ene)
x12<-rep(0,ene)
x22<-rep(0,ene)
jota<-seq(ene)
ti2<-(jota-0.5)/ene
xsup2<-ti2+percentiles[1]-(0.5/ene)
xinf2<-ti2-percentiles[1]+(0.5/ene)
Cuentore2<-0
Cuentosp2<-0
y1<-asin(ti2^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:ene)
{
if(y1[j]<(pi/2)) x12[j]<-sin(y1[j])^2
  else x12[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti2^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:ene)
{
if(y2[j]>0) x22[j]<-y2[j]^2
  else x22[j]<-0
}
}

```

```

x12<-sort(x12)
x22<-sort(x22)
vec<-mimuestra
vec2<-(vec-mean(vec))/sqrt(((ene-1)*var(vec))/ene)
familiar<-pnorm(sort(vec2))
if( any(familiar>xsup2 ) | any(familiar<xinf2)) Cuentore2<-Cuentore2+1
if( any(familiar>x12 ) | any(familiar<x22)) Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  D11 <-max(abs(ti2-familiar))+(0.5/ene)
  vector11<-(2/pi)*asin(familiar^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti2^0.5)
DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
plot(ti2, familiar, xlim = c(0.02, 1), ylim = c(min(xinf2), max(xsup2)), xlab =
"Prob. teórica U(0,1)", ylab=" Prob. empírica de la muestra",pch = 2)
points(ti2, x12, pch = ".", col = 2)
lines(ti2, x12, col = 2)
points(ti2, x22, pch = ".", col = 2)
lines(ti2, x22, col = 2)
points(ti2, xsup2, pch = ".", col = 5)
lines(ti2, xsup2, col = 5)
points(ti2, xinf2, pch = ".", col = 5)
lines(ti2, xinf2, col = 5)
abline(0, 1)
legend(0, (0.9), c("Bandas con DSP", "Bandas con D",fill=c(2,5))
print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al 5%")
print("los valores de D y DSP calculados son")
graficoPPplot <- c(D11, DSP11, Cuentore2, Cuentosp2)
graficoPPplot
}

```

Programa 4.3.3

Grafico DSP con bandas de aceptación del 95% para tamaños muestrales fijos y estima los parámetros de la muestra con EMV. Calcula los estadísticos D y DSP y la decisión del test al 5%.

```

graficoDSPplot<-function(mimuestra)
{
  vec<-mimuestra
  ene<-length(vec)
if(ene == 10) percentiles <- c(0.266684, 0.1461638)
  else if(ene == 20) percentiles <- c(0.1925992, 0.118097)
  else if(ene == 30) percentiles <- c(0.1605957, 0.1045905)
  else if(ene == 40) percentiles <- c(0.13944, 0.09388433)
  else if(ene == 100) percentiles <- c(0.08852421, 0.06745192)
else stop("no se puede con esa longitud de vector")
D11<-0
DSP11<-0
  vector11<-rep(0,ene)
vector22<-rep(0,ene)
punto<-percentiles[1]-(0.5/ene)
jota<-seq(ene)
ti2<-(jota-0.5)/ene
xsup2<-ti2+percentiles[1]-(0.5/ene)
xinf2<-ti2-percentiles[1]+(0.5/ene)
x12<-rep(0,ene)
x22<-rep(0,ene)
Cuentore2<-0
Cuentosp2<-0
y1<-asin(ti2^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:ene)
{
if(y1[j]<(pi/2)) x12[j]<-sin(y1[j])^2
  else x12[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti2^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:ene)
{
if(y2[j]>0) x22[j]<-y2[j]^2
  else x22[j]<-0
}
}

```

```

}
x12<-sort(x12)
x22<-sort(x22)
limite1<-hastadondeigual(sort((sin(0.5*pi*ti2)^2+punto)^0.5),1)
y11<-(2/pi)*asin((sin(0.5*pi*ti2[1:limite1])^2+punto)^0.5)
limite2<-hastadondebajo(sort(sin(0.5*pi*ti2)^2-punto),0)
y22<-(2/pi)*asin((sin(0.5*pi*ti2[limite2:ene])^2-punto)^0.5)
vec2<-(vec-mean(vec))/sqrt(((ene-1)*var(vec))/ene)
familiar<-pnorm(sort(vec2))
if( any(familiar>xsup2 ) | any(familiar<xinf2)) Cuentore2<-Cuentore2+1
if( any(familiar>x12 ) | any(familiar<x22)) Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  D11 <-max(abs(ti2-familiar)+(0.5/ene))
  vector11<-(2/pi)*asin(familiar^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti2^0.5)
  DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
junto<-c(ti2,vector22)
junto2<-c(vector11,y11,y22,na.rm=T)
plot(vector22,vector11,pch=2,xlim=c(min(junto),max(junto)),ylim=c(0,max(junto2)),
xlab="Prob. teóricas U(0,1) transformadas por arcseno",ylab="Prob.empíricas de la
muestra transformadas por arcseno")
abline(percentiles[2],1,col=2)
abline(-percentiles[2],1,col=2)
abline(0,1)
points(ti2[1:limite1],y11,col=5,pch=".")
points(ti2[limite2:ene],y22,col=5,pch=".")
lines(ti2[limite2:ene],y22,col=5,pch=".")
lines(ti2[1:limite1],y11,col=5,pch=".")
legend(0.01,(0.8),c("Bandas con DSP","Bandas con D"),fill=c(2,5))
print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al 5%")
print("los valores de D y DSP calculados son")
graficoDSPplot<-c(D11,DSP11,Cuentore2,Cuentosp2)
graficoDSPplot
}

```

Programa 4.4.

Calcula la potencia de los tests con los estadísticos D y DSP en el caso de la hipótesis nula: la distribución de la muestra aleatoria pertenece a la familia normal y en la alternativa una distribución chi cuadrado. Se puede cambiar luego por otras distribuciones.

#este programa calcula potencia con bandas de aceptacion y con estadísticos.

```

set.seed(8)
nmuestra<-10
gradodelibertad<-6
while(nmuestra<31)
{
ti<-rep(0,nmuestra)
x1<-rep(0,nmuestra)
x2<-rep(0,nmuestra)
percentiles<-c(0,0)
jota<-seq(1:nmuestra)
ti<-(jota-0.5)/nmuestra
if(ene == 10) percentiles <- c(0.266684, 0.1461638)
  else if(ene == 20) percentiles <- c(0.1925992, 0.118097)
  else if(ene == 30) percentiles <- c(0.1605957, 0.1045905)
  else if(ene == 40) percentiles <- c(0.13944, 0.09388433)
  else if(ene == 100) percentiles <- c(0.08852421, 0.06745192)
else stop("no se puede con esa longitud de vector")
xsup<-ti+percentiles[1]-(0.5/nmuestra)
xinf<-ti-percentiles[1]+(0.5/nmuestra)
Cuentore<-0
Cuentosp<-0
cuentorechazoB1<-0
cuentorechazoSPB1<-0
y1<-asin(ti^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:nmuestra)
{

```

```

if(y1[j]<(pi/2)) x1[j]<-sin(y1[j])^2
  else x1[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:nmuestra)
{
if(y2[j]>0) x2[j]<-y2[j]^2
  else x2[j]<-0
}
x2<-sort(x2)
x1<-sort(x1)
for( j in 1:1000)
{
vecchisq<-rchisq(nmuestra,gradodelibertad)
vecchisq2<-(vecchisq-mean(vecchisq))/sqrt(((nmuestra-1)*var(vecchisq))/nmuestra)
familiarchis<-pnorm(sort(vecchisq2))
if( any(familiarchis>xsup ) | any(familiarchis<xinf)) Cuentore<-Cuentore+1
if( any(familiarchis>x1 ) | any(familiarchis<x2)) Cuentosp<-Cuentosp+1
vector11<-(2/pi)*asin(familiarchis^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
  DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
  D11 <-max(abs(ti-familiarchis))+(0.5/nmuestra)
  if(D11> percentiles[1])cuentorechazoB1<-cuentorechazoB1+1
if(DSP11> percentiles[2])cuentorechazoSPB1<-cuentorechazoSPB1+1
}
print(unlist(list( "n"=nmuestra,"grados de libertad"=gradodelibertad,"Cuento para
  D"=Cuentore,"Cuento para DSP"=Cuentosp,"Cuento con est
  D"=cuentorechazoB1,"Cuento con est DSP"=cuentorechazoSPB1)))
nmuestra<-nmuestra+10
}

```

Programas correspondientes al Capítulo 5

Programa 5.1

Realiza el método de bisección para la función del denominador con K.

```

bisectol1<-function(KA,x0,x1)
{
  if(abs(x0)>9|abs(x1)>9)stop("valor inicial muy grande en valor absoluto")
  const<-KA
  u0<-(const*dnorm(x0))+x0-(x0*pnorm(x0))
  print(u0)
  u1<-(const*dnorm(x1))+x1-(x1*pnorm(x1))
  print(u1)
  k<-1 #de control
  if(sign(u1)==sign(u0))estimamaxverobi<-c(NA)
  if(sign(u1)!=sign(u0))
  {
    while( abs(x0-x1)>10^(-7)&& abs(u1)>0.000001 )
    {
      print("x0")
      print(x0)
      x2<-(x1+x0)/2
      u1<-(const*dnorm(x1))+x1-(x1*pnorm(x1))
      print("x1")
      print(x1)
      print(u1)
      u2<-(const*dnorm(x2))+x2-(x1*pnorm(x2))
      print(u2)
      print("x2")
      print(x2)
      if(sign(u1)!=sign(u2))x0<-x2
      else x1<-x2
      k<-k+1 # de control
      print(k)
    }
  }
}

```

```

        if(abs(u1)<=0.000015 || abs(u2)<=0.000015)bisecto<-x1
        if(abs(u1)>0.000015&& abs(u2)>0.000015)
        {
            print(" la sucesion no converge despues de  k iteraciones")
            print( k)
            bisecto<-NA
        }
    }
bisecto
}

```

Programa 5.2.

Función término 4 que se empleará en programas siguientes, evalúa la ecuación (5.11) usando la definición de Y en (5.4).

```

termino4<-function(x, ka)
{
    #x numero
    #ka constante
    if(pnorm(x)==1)termino4<-"no hay"# problema cuando me da algo no numérico
    else if (dnorm(x)!=0)# no me interesa evaluar en valores muy pequeños de x
    {
        yo <- (ka * dnorm(x))/(1 - pnorm(x))
        termino4 <- (1 - (yo * (yo + x)))/((yo + x)^2)
    }
    else termino4<-"no hay"
    termino4
}

```

Programa 5.3.

Calcula los EMV, mediante el método de la secante, necesita valor inicial xo.

```

# para censura a la derecha de tipo II, o sea T= X(n)
maxvero24<-function(ene,xmuestra,x0)
{
    media<-mean(xmuestra)
    x1 <-(max(xmuestra)-media)/stdev(xmuestra)
    print("valor de corte standarizado")
    print(x1)
    ere<-length(xmuestra)
    ese2<-var(xmuestra)*(ere-1)/ere
    termino1<-ese2/((media-max(xmuestra))^2)
    const<-(ene-ere)/ere
    if(pnorm(x0)!=1 && pnorm(x1)!=1 && dnorm(x0)!= 0 )
    {
        term0<-termino4(x0,const)
        term1<-termino4(x1,const)
    }
    else
    {
        term1<-999
        term0<-999
    }
    k<-1
    print(k)
    while(is.numeric(term0-term1) && abs(term0-term1)>0.00001 && term0!= 999 && term1
        != 999 )
    {
        x2<-x1-((termino1-term1)*(x1-x0)/(term0-term1))
        x0<-x1
        x1<-x2
        if ( pnorm(x0)!= 1 && dnorm(x0)!= 0)term0<-termino4(x0,const)
        else term0<-999
        if(pnorm(x1)!= 1 && dnorm(x1)!=0 )term1<-termino4(x1,const)
        else term1<-999
    }
    print(x0)
    print(x1)
}

```

```

print(term0)
print(term1)
print(term0-term1)
k<-k+1 #de control
print(k)
}
if(pnorm(x1)!=1 && dnorm(x1)!=0 && pnorm(x0)!= 1 && dnorm(x0)!= 0)
{
y1<-(const*dnorm(x1))/(1-pnorm(x1))
print(y1)
ache<-y1/(y1+x1)
print(ache)
if(ache >=0)
{
muest1<-mean(xmuestra)-(ache*(media-max(xmuestra)))
varest<-ese2+(ache * ((media-max(xmuestra))^2))
sigmaest<-sqrt(varest)
estimamaxvero<-c(muest1,sigmaest)
}
if( ache <0)
{
print("converge a h negativo, valor inicial inadecuado")
estimamaxvero<-999
}
}
else
{
estimamaxvero<-999
print(" se partio de un valor inicial inadecuado")
}
estimamaxvero
}

```

Programa 5.4.1

Mediante bisección se obtienen los EMV de una muestra censurada de tipo II.

```

maxverobi4444<-function(ene,xmuestra,x0)
{
xmuestra<-sort(xmuestra)
x1 <- (max(xmuestra)-mean(xmuestra))/stdev(xmuestra)
ere<-length(xmuestra)
const<-(ene-ere)/ere
ese2<-var(xmuestra)*(ere-1)/ere
media<-mean(xmuestra)
if(const==0)estimamaxverobi<-c(media,sqrt(ese2))
else
{
terminol<-ese2/((media-max(xmuestra))^2)
if(dnorm(x0)<0.000001 ||pnorm(x0)==1)estimamaxverobi<-c(NA,NA)
else
{
if(dnorm(x1)>0.00001 && pnorm(x1)!=1)u1<-terminol-termino4(x1,const)
if(dnorm(x0)>0.00001 && pnorm(x0)!=1)u0<-terminol-termino4(x0,const)
k<-1 #de control
if(sign(u1)==sign(u0))estimamaxverobi<-c(NA,NA)
if( sign(u1)!= sign(u0))
{
while( abs(x0-x1)>0.00000001 && sign(u1)!=sign(u0) )
{
x2<-(x1+x0)/2
u1<-terminol-termino4(x1,const)
u2<-terminol-termino4(x2,const)
if(sign(u1)!=sign(u2))x0<-x2
else x1<-x2
k<-k+1 # de control
}
}
y1<-const*dnorm(x1)/(1-pnorm(x1))

```

```

ache<-y1/(y1+x1)
muest1<-mean(xmuestra)-(ache*(mean(xmuestra)-max(xmuestra)))
varest<-ese2+(abs(ache) * ((mean(xmuestra)-max(xmuestra))^2))
sigmaest<-sqrt(varest)
estimamaxverobi<-c(muest1,sigmaest)
}
}
}
estimamaxverobi
}

```

Programa 5.4.2

Mediante bisección se obtienen los EMV de una muestra censurada de tipo II o de tipo I.

maxverobiTIPO<-function(ene,xmuestra,x0,tipo,Te)#xmuestra tiene que ser menor que un T

```

{
if( tipo==2)
{
te<-max(xmuestra)
}
else if( tipo==1)
{
te<-Te
}
else stop(" Tipo solo puede ser 1 o 2")
x1 <- (te-mean(xmuestra))/stdev(xmuestra)
ere<-length(xmuestra)
const<-(ene-ere)/ere
ese2<-var(xmuestra)*(ere-1)/ere
media<-mean(xmuestra)
if(const==0)estimamaxverobi<-c(media,sqrt(ese2))
else
{
termino1<-ese2/((media-max(xmuestra))^2)
if(dnorm(x0)<0.000001 ||pnorm(x0)==1)estimamaxverobi<-c(NA,NA)
else
{
if(dnorm(x1)>0.00001 && pnorm(x1)!=1)u1<-termino1-termino4(x1,const)
if(dnorm(x0)>0.00001 && pnorm(x0)!=1)u0<-termino1-termino4(x0,const)
k<-1 #de control
if(sign(u1)==sign(u0))estimamaxverobi<-c(NA,NA)
if( sign(u1)!= sign(u0))
{
while( abs(x0-x1)>0.00000001 && sign(u1)!=sign(u0) )
{
x2<-(x1+x0)/2
u1<-termino1-termino4(x1,const)
u2<-termino1-termino4(x2,const)
if(sign(u1)!=sign(u2))x0<-x2
else x1<-x2
k<-k+1 # de control
}
}
y1<-const*dnorm(x1)/(1-pnorm(x1))
ache<-y1/(y1+x1)
muest1<-mean(xmuestra)-(ache*(mean(xmuestra)-max(xmuestra)))
varest<-ese2+(abs(ache) * ((mean(xmuestra)-max(xmuestra))^2))
sigmaest<-sqrt(varest)
estimamaxverobi<-c(muest1,sigmaest)
}
}
}
estimamaxverobi
}

```

Programa 5.5.

Obtiene los estimadores de máxima verosimilitud para una muestra censurada de tipo II y cualquier razón de censura, conociendo el tamaño de la muestra N, no necesita valores iniciales. Utiliza programa anterior.

```
maxverobiALL<-function(ene,mimuestra)
{
  xo<-2
  estimomaxvero<-maxverobi4444(ene,sort(mimuestra),xo)
  while(estimomaxvero[1]=="NA" && xo>(-2))
  {
    xo<-xo-(0.25)
    estimomaxvero<-maxverobi4444(ene,sort(mimuestra),xo)
  }
  print(xo)
  if(estimomaxvero[1]=="NA")print("No converge con los valores iniciales
probados,testear normalidad")
  estimomaxvero
}
```

Programa 5.6

Obtiene los estimadores de Gupta para una muestra censurada de tipo II cualquiera, conociendo el tamaño de la muestra completa.

```
gupta<-function(ene, xmuestra)
{
  xmuestral <- sort(xmuestra)
  ere <- length(xmuestral)
  jota <- seq(1:ere)
  mi <- qnorm((jota - 0.375)/(ene + 0.125))
  mmedia <- mean(mi)
  denomino <- sum((mi - mmedia)^2)
  bi <- (1/ere) - ((mmedia * (mi - mmedia))/denomino)
  ci <- (mi - mmedia)/denomino
  muestimado <- sum(bi * xmuestral)
  sigmaestimado <- sum(ci * xmuestral)
  estimagupta <- c(muestimado, sigmaestimado)
  estimagupta
}
```

Programa 5.7

Calcula la eficiencia relativa de los estimadores de máxima verosimilitud y los del Gupta para una muestra con censura simple a derecha de tipo II.

```
set.seed(8)
nrep<-10000
pprueba<-0.2
while(pprueba<1.01)
{
  print(pprueba)
  nmuestra<-20# con n=20 no tienen sentido p=0.1,0.2 y 0.3
  for(k in 1:8)
  {
    nmuestra<-nmuestra+10
    ereprueba<-pprueba*nmuestra
    vecunif1<-rep(0,nmuestra)
    vecunif2<-rep(0,nmuestra)
    vec1<-rep(0,nrep)
    vec3<-rep(0,nrep)
    vec11<-rep(0,nrep)
    vec33<-rep(0,nrep)
    vector1<-rep(0,nrep)
```



```

vector2<-rep(0,nrep)
suma<-0
suma2<-0
suma3<-0
suma4<-0
cociente1<-1
cociente2<-1
for( i in 1:nrep)
{
  vecunif1<-sort(rnorm(nmuestra))
  vecunif2<-vecunif1[1:ereprueba]
  estimoMV<-maxverobiALL(nmuestra,vecunif2)
  estimoGupta<-gupta(nmuestra,vecunif2)
  vec1[i]<-estimoMV[1]^2
  vec3[i]<-(1-estimoMV[2])^2
  vec11[i]<-estimoGupta[1]^2
  vec33[i]<-(1-estimoGupta[2])^2
}
vec1<-as.vector(na.exclude(vec1))
vec3<-as.vector(na.exclude(vec3))
vector1<-vec1[1:nrep]
vector2<-vec3[1:nrep]
print(unlist(list(length(as.vector(vec1)),length(as.vector(vec3)))))
print(nmuestra)
suma<-mean(vec11[1:nrep])
suma2<-mean(vec33[1:nrep])
print(unlist(list("eficienciaGupta media"=suma,"eficiencia Gupta sigma"=suma2)))
suma3<-mean(vector1)
suma4<-mean(vector2)
print(unlist(list("eficienciaEMV media"=suma3,"eficiencia EMV sigma"=suma4)))
cociente1<-(suma3/suma)*100
cociente2<-(suma4/suma2)*100
print( list("Eficiencia relativa Emv a Gupta media"= cociente1, "Eficiencia
relativa EMV Gupta varianza"=cociente2))
}
pprueba<-pprueba+0.1
}

```

Programa 5.8

Calcula los percentiles de la distribución de los estadísticos D y DSP bajo H_0 : la muestra con censura a derecha de tipo II proviene de una normal de parámetros desconocidos. Utiliza las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros.

```

set.seed(8)
nrep<-10000
pprueba<-0.3
while(pprueba<1.01)
{
  print(pprueba)
  nmuestra<-20#
  for(k in 1:8)
  {
    nmuestra<-nmuestra+10
    if( nmuestra==30)set.seed(8)
  else if( nmuestra==40)set.seed(18)
  else if( nmuestra==50)set.seed(28)
  else if( nmuestra==60)set.seed(38)
  else if( nmuestra==70)set.seed(48)
  else if( nmuestra==80)set.seed(58)
  else if( nmuestra==90)set.seed(68)
  else if( nmuestra==100)set.seed(78)
    DSP11<-rep(0,nrep)
    D11<-rep(0,nrep)
    DSP112<-rep(0,nrep)
    D112<-rep(0,nrep)
    ereprueba<-pprueba*nmuestra
  }
}

```

```

vector11<-rep(0,ereprueba)
vector22<-rep(0,ereprueba)
vector111<-rep(0,ereprueba)
vector222<-rep(0,ereprueba)
vecunif1<-rep(0,nmuestra)
ui<-rep(0,ereprueba)
vecunif2<-rep(0,ereprueba)
jota<-seq(1:ereprueba)
ti<-(jota-0.5)/nmuestra
for( i in 1:nrep)
{
  vecunif1<-sort(rnorm(nmuestra))
  vecunif2<-vecunif1[1:ereprueba]
  estimoMV<-maxverobi4444(nmuestra,vecunif2,-0.75)
  ui<-sort(pnorm((vecunif2-estimoMV[1])/(estimoMV[2])))
  vector22<-(2/pi)*asin((ti)^0.5)
  vector11<-(2/pi)*asin((ui)^0.5)
  vector222<-(jota/nmuestra)-ui
  vector111<-(ui)-((jota-1)/nmuestra)

D11[i]<-max(vector111,vector222)
DSP11[i]<-max(abs(vector11-vector22))
}
  print(nmuestra)
  D112<-as.vector(na.exclude(D11))
  DSP112<-as.vector(na.exclude(DSP11))
  print(unlist(list(length(DSP112),length(D112))))# me aseguro no haya NA
  if(length(DSP112)>9999)
  {
    print(unlist(list("n"=nmuestra,"p"=pprueba,"r"=ereprueba, "DSP"=
      quantile(DSP112[1:10000],c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
    print(unlist(list("n"=nmuestra," D"=
      quantile(D112[1:10000],c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
  }
  if(length(as.vector(DSP112))<=9999) (print("D112 tiene longitud menor a 10000"))
}
pprueba<-pprueba+0.1

```

Programa 5.9

Calcula los percentiles de la distribución de los estadísticos D y DSP bajo H_0 : la muestra con censura a derecha de tipo II proviene de una normal de parámetros desconocidos. Utiliza las estimaciones lineales de Gupta de los parámetros.

```

set.seed(8)
nrep<-10000
pprueba<-0.1
while( pprueba< 1.01)
{
  nmuestra<-30
  for(k in 1:10)
  {
    nmuestra<-nmuestra+10
    DSP11<-rep(0,nrep)
    D11<-rep(0,nrep)
    ereprueba<-pprueba*nmuestra
    vector11<-rep(0,ereprueba)
    vector22<-rep(0,ereprueba)
    vector111<-rep(0,ereprueba)
    vector222<-rep(0,ereprueba)
    vecunif1<-rep(0,nmuestra)
    ui<-rep(0,ereprueba)
    vecunif2<-rep(0,ereprueba)
    jota<-seq(1:ereprueba)
    ti<-(jota-0.5)/nmuestra
    for( i in 1:nrep)
    {

```

```

    vecunif1<-sort(rnorm(nmuestra))
    vecunif2<-vecunif1[1:ereprueba]
    estimogupta<-gupta(nmuestra,vecunif2)
    ui<-sort(pnorm((vecunif2-estimogupta[1])/(estimogupta[2])))
    vector22<-(2/pi)*asin((ti)^0.5)
    vector11<-(2/pi)*asin((ui)^0.5)
    vector222<-(jota/nmuestra)-ui
    vector111<-(ui)-((jota-1)/nmuestra)
    D11[i]<-max(vector111,vector222)
    DSP11[i]<-max(abs(vector11-vector22))
  }
print(unlist(list("n"=nmuestra,"p"=pprueba,"r"=ereprueba, "DSP"=
  quantile(DSP11,c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
print(unlist(list("n"=nmuestra," D"=
  quantile(D11,c(0.5,0.75,0.9,0.95,0.99),na.rm=T))))
print(nmuestra)
}
pprueba<-pprueba+0.1
print(pprueba)
}

```

Programa 5.10

Calcula los estadísticos D y DSP para una muestra con censura de tipo II a derecha y la decisión de los tests basado en ellos, se trabaja con un nivel 0.05, el $nmuestra$ puede ser distinto de la longitud del vector. La razón de censura se fijó en 0.5. Utiliza estimaciones de Gupta de los parámetros.

```

DDSPcensura0.5<-function(nmuestra,mimuestra)
{
  pprueba<-0.5
  ereprueba<-pprueba*nmuestra
  ti<-rep(0,ereprueba)
  x1<-rep(0,ereprueba)
  x2<-rep(0,ereprueba)
  percentiles<-c(0,0)
  jota<-seq(1:ereprueba)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
  if(nmuestra==20)percentiles<-c(0.1610,0.09617)
    else if(nmuestra==30)percentiles<-c(0.1350, 0.08476)
    else if(nmuestra==40)percentiles<-c(0. 0.11722 ,0.07643)
    else if(nmuestra==50)percentiles<-c(0.1031, 0.07013)
    else if(nmuestra==60)percentiles<-c(0.09583, 0.06499)
  else percentiles<-c(0.07355, 0.05363) #nmuestra=100
  cuentorechazoB1<-0
  cuentorechazoSPB1<-0
  vec<-sort(mimuestra)
  vec1<-vecchisq[1:ereprueba]
  estimogupta<-gupta(nmuestra,vec1)
  vec2<-(vec1-estimogupta[1])/estimogupta[2]
  familiachis<-pnorm(sort(vec2))
  vector11<-(2/pi)*asin(familiachis^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
  DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
  D11 <-max(abs(ti-familiachis))+(0.5/nmuestra)
  if(D11> percentiles[1])cuentorechazoB1<-cuentorechazoB1+1
  if(DSP11> percentiles[2])cuentorechazoSPB1<-cuentorechazoSPB1+1
  print(unlist(list("n"=nmuestra,"r"=ereprueba,"Cuento con
  estD"=cuentorechazoB1,"Cuento con est DSP"=cuentorechazoSPB1,"D"=D11,"DSP"=DSP11)))
}

```

Programa 5.11.1

Realiza el gráfico *PP* para una muestra con censura de tipo II proveniente de una normal de parámetros desconocidos y estimados por máxima verosimilitud.

```
graficoPPplotCensuraNormal<-function(mimuestra,tamanoriginal, percentilD ,
  percentilDSP, razoncensura)
{
  enegrande<-tamanoriginal
  ene<-length(mimuestra)
  vec<-mimuestra
  p<-razoncensura
  percentiles<-c(percentilD, percentilDSP)
  D11<-0
  DSP11<-0
  vector11<-rep(0,ene)
  vector22<-rep(0,ene)
  x12<-rep(0,ene)
  x22<-rep(0,ene)
  jota<-seq(ene)
  ti2<-(jota-0.5)/enegrande
  xsup2<-ti2+percentiles[1]-(0.5/enegrande)
  xinf2<-ti2-percentiles[1]+(0.5/enegrande)
  for( i in 1:ene)
  {
    if( xinf2[i]<0)xinf2[i]<-0
    else if (xsup2[i]>1)xsup2[i]<-1
  }
  Cuentore2<-0
  Cuentosp2<-0
  y1<-asin(ti2^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
  for( j in 1:ene)
  {
    if(y1[j]<(pi/2)) x12[j]<-sin(y1[j])^2
    else x12[j]<-1
  }
  y2<-sin(asin(ti2^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
  for( j in 1:ene)
  {
    if(y2[j]>0) x22[j]<-y2[j]^2
    else x22[j]<-0
  }
  x12<-sort(x12)
  x22<-sort(x22)
  estimoMV<-maxverobiALL(enegrande,vec)
  vec2<-(vec-estimoMV[1])/(estimoMV[2])
  familian<-pnorm(sort(vec2))
  if( any(familian>xsup2 ) | any(familian<xinf2)) Cuentore2<-Cuentore2+1
  if( any(familian>x12 ) | any(familian<x22)) Cuentosp2<-Cuentosp2+1
  D11 <-max(abs(ti2-familian))+(0.5/enegrande)
  vector11<-(2/pi)*asin(familian^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti2^0.5)
  DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
  plot(ti2, familian, xlim = c(0.02, max(ti2)), ylim = c(0, max(familian)),
  xlab = " Prob. teóricas de la U(0,1)",ylab="Prob. empíricas de la muestra con datos
  censurados ", pch = 2)
  points(ti2, x12, pch = ".", col = 2)
  lines(ti2, x12, col = 2)
  points(ti2, x22, pch = ".", col = 2)
  lines(ti2, x22, col = 2)
  points(ti2, xsup2, pch = ".", col = 5)
  lines(ti2, xsup2, col = 5)
  points(ti2, xinf2, pch = ".", col = 5)
  lines(ti2, xinf2, col = 5)
  abline(0, 1)
  legend(0.02, max(familian), c("Bandas con DSP", "Bandas con D"),fill=c(2,5))
  print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al p")
  print("los valores de D y DSP calculados son y la proporción de completas es")
}
```

```

    graficoPPplotCensura <- c(D11, DSP11, Cuentore2, Cuentosp2,p)
    graficoPPplotCensura
}

```

Programa 5.11.2

Realiza el gráfico *DSP* para una muestra con censura a la derecha de tipo II de una normal de parámetros desconocidos y estimados por máxima verosimilitud.

```

graficoDSPplotCensuraNormal<- function(mimuestra,tamanoriginal,
    percentilD,percentilDSP,razoncensura)
    enegrande<-tamanoriginal
    vec<-mimuestra
    ene<-length(vec)
    p<-razoncensura
    percentiles<-c(percentilD, percentilDSP)
D11<-0
DSP11<-0
    vector11<-rep(0,ene)
vector22<-rep(0,ene)
punto<-percentiles[1]-(0.5/enegrande)
jota<-seq(ene)
ti2<-(jota-0.5)/enegrande
xsup2<-ti2+percentiles[1]-(0.5/enegrande)
xinf2<-ti2-percentiles[1]+(0.5/enegrande)
x12<-rep(0,ene)
x22<-rep(0,ene)
Cuentore2<-0
Cuentosp2<-0
y1<-asin(ti2^0.5)+0.5*pi*percentiles[2]
for( j in 1:ene)
{
if(y1[j]<(pi/2)) x12[j]<-sin(y1[j])^2
    else x12[j]<-1
}
y2<-sin(asin(ti2^0.5)-0.5*pi*percentiles[2])
for( j in 1:ene)
{
if(y2[j]>0) x22[j]<-y2[j]^2
    else x22[j]<-0
}
x12<-sort(x12)
x22<-sort(x22)
limite1<-hastadondeigual(sort((sin(0.5*pi*ti2)^2+punto)^0.5),1)
y11<-(2/pi)*asin((sin(0.5*pi*ti2[1:limite1])^2+punto)^0.5)
limite2<-hastadondebajo(sort(sin(0.5*pi*ti2)^2-punto),0)
y22<-(2/pi)*asin((sin(0.5*pi*ti2[limite2:ene])^2-punto)^0.5)
estimoMV<-maxverobiALL(enegrande,vec)
vec2<-(vec-estimoMV[1])/(estimoMV[2])
familiar<-pnorm(sort(vec2))
if( any(familiar>xsup2 ) | any(familiar<xinf2)) Cuentore2<-Cuentore2+1
if( any(familiar>x12 ) | any(familiar<x22)) Cuentosp2<-Cuentosp2+1
    D11 <-max(abs(ti2-familiar)+(0.5/enegrande))
    vector11<-(2/pi)*asin(familiar^0.5)
    vector22<-(2/pi)*asin(ti2^0.5)
    DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
junto<-c(ti2,vector22)
junto2<-c(vector11,y11,y22,na.rm=T)
plot(vector22,vector11,pch=2,xlim=c(min(junto),max(junto)),ylim=c(0,max(vector11)),
    xlab="Prob. teóricas U(0,1)transformadas por arcseno",ylab="Prob. empíricas de
    la Muestra con censura transformadas por arcseno")
abline(percentiles[2],1,col=2)
abline(-percentiles[2],1,col=2)
abline(0,1)
points(ti2[1:(limite1)],y11,col=5,pch=".")
points(ti2[limite2:ene],y22,col=5,pch=".")
lines(ti2[limite2:ene],y22,col=5,pch=".")

```

```

lines(ti2[1:limite1],y11,col=5,pch=".")
legend(0.01,max(vector11),c("Bandas con DSP", "Bandas con D"),fill=c(2,5))
print(" 0 indica no rechazo Ho y 1 indica rechazo al p%")
print("los valores de D y DSP calculados son y p es igual a ")
graficoDSPplotCensuraNormal<-c(D11,DSP11,Cuentore2,Cuentosp2,p)
graficoDSPplotCensuraNormal
}

```

Programa 5.11.3

Realiza el gráfico QQ para una muestra con censura a derecha de tipo II de una normal de parámetros desconocidos y estimados por máxima verosimilitud.

```

graficoQQplotCensuraNormal<-function(mimuestra,tamanoriginal,
  percentilD,percentilDSP, razoncensura)
{
  # los puntos criticos deben darse para el tamaño N grande
  enegrande<-tamanoriginal
  ene<-length(mimuestra)
  vec<-mimuestra
  p<-razoncensura
  percentiles<-c(percentilD, percentilDSP)
  D11 <- 0
  DSP11 <- 0
  vector11 <- rep(0, ene)
  vector22 <- rep(0, ene)
  x12 <- rep(0, ene)
  x22 <- rep(0, ene)
  jota <- seq(ene)
  ti2 <- (jota - 0.5)/enegrande
  xsup2 <- ti2 + percentiles[1] - (0.5/enegrande)
  xinf2 <- ti2 - percentiles[1] + (0.5/enegrande)
  Cuentore2 <- 0
  Cuentosp2 <- 0
  y1 <- asin(ti2^0.5) + 0.5 * pi * percentiles[2]
  for(j in 1:ene) {
    if(y1[j] < (pi/2))
      x12[j] <- sin(y1[j])^2
    else x12[j] <- 1
  }
  y2 <- sin(asin(ti2^0.5) - 0.5 * pi * percentiles[2])
  for(j in 1:ene) {
    if(y2[j] > 0)
      x22[j] <- y2[j]^2
    else x22[j] <- 0
  }
  x12 <- sort(x12)
  x22 <- sort(x22)
  vecmax <- max(vec)
  vecmin <- min(vec)
  estimoMV<-maxverobiALL(enegrande,vec)
  vec2<-(vec-estimoMV[1])/(estimoMV[2])
  familian<-pnorm(sort(vec2))
  if(any(familian > xsup2) | any(familian < xinf2))Cuentore2 <- Cuentore2 + 1
  if(any(familian > x12) | any(familian < x22))Cuentosp2 <- Cuentosp2 + 1
  D11 <- max(abs(ti2 - familian) + (0.5/enegrande))
  vector11 <- (2/pi) * asin(familian^0.5)
  vector22 <- (2/pi) * asin(ti2^0.5)
  DSP11 <- max(abs(vector11 - vector22))
  ti3 <- seq(min(qnorm(ti2)), max(qnorm(ti2)), 0.01)
  eme <- length(ti3)
  limite1 <- hastadonde(pnorm(ti3) + percentiles[1] - (0.5/enegrande), 1)
  limite2 <- hastadondebajo(pnorm(ti3) - percentiles[1] + (0.5/enegrande), 0)
  vector13 <- estimoMV[1] + estimoMV[2] * qnorm(pnorm(ti3[1:limite1]) +
    percentiles[1] - (0.5/ene))
  vector23 <- estimoMV[1] + estimoMV[2] * qnorm(pnorm(ti3[limite2:eme]) -
    percentiles[1] + (0.5/ene))
}

```

```

vector14 <- estimoMV[1] + estimoMV[2] * qnorm(sin(asin(pnorm(ti3)^0.5) +
  0.5 * pi * percentiles[2])^2)
vector24 <- estimoMV[1] + estimoMV[2] * qnorm(sin(asin(pnorm(ti3)^0.5) -
  0.5 * pi * percentiles[2])^2)
plot(qnorm(ti2), vec, xlim = c(min(qnorm(ti2)), max(qnorm(ti2))),
  ylim = c(vecmin, vecmax), pch = 2, xlab =
  "Cuantiles teóricos de la N(0,1)", ylab="Cuantiles empíricos de la Muestra con
  datos con censura")
#title("Bandas de aceptacion con D y DSP para el QQ-plot")
abline(estimoMV[1], estimoMV[2])
limite3 <- hastadonde(vector13, vecmax)
vector133 <- vector13[1:limite3]
limite33 <- hastadondebajo(vector133, vecmin)
points(ti3[limite33:limite3], vector13[limite33:limite3], col = 5,
  pch = ".")
lines(ti3[limite33:limite3], vector13[limite33:limite3], col = 5)
limite4 <- hastadondebajo(vector23, vecmin)
vector233 <- vector23[limite4:length(vector23)]
limite44 <- hastadondeigual(vector233, vecmax)
ti33 <- ti3[limite2:eme]
points(ti3[(limite2 + limite4):(limite2 + limite4 + limite44 - 1)],
  vector23[limite4:(limite44 + limite4 - 1)], col = 5, pch = ".")
lines(ti3[(limite2 + limite4):(limite2 + limite4 + limite44 - 1)],
  vector23[limite4:(limite44 + limite4 - 1)], col = 5)
limite5 <- hastadondeigual(vector14, vecmax)
limite54 <- hastadondebajo(vector14, vecmin)
points(ti3[limite54:limite5], vector14[limite54:limite5], col = 2,
  pch = ".")
lines(ti3[limite54:limite5], vector14[limite54:limite5], col = 2)

limite6 <- hastadondebajo(vector24, vecmin)
limite66 <- hastadondeigual(vector24, vecmax)
points(ti3[limite6:limite66], vector24[limite6:limite66], col = 2,
  pch = ".")
lines(ti3[limite6:limite66], vector24[limite6:limite66], col = 2)

legend(-2, (0.97) * vecmax, c("Bandas con DSP", "Bandas con D"), fill=c(2,5))
print(" 0 indica no rechaza Ho y 1 indica rechazo al p%")
print("los valores de D y DSP calculados son y el valor de p es igual a ")
graficoQQplot <- c(D11, DSP11, Cuentore2, Cuentosp2, p)
graficoQQplot
}

```

Programa 5.12

Calcula la potencia de los tests D y DSP para una muestra con censura de tipo II a derecha de una normal de parámetros desconocidos y estimados por Gupta. La razón de censura en este ejemplo es 0.6 y el nivel en 0.05.

```

set.seed(8)
nmuestra<-20
nrep<-1000
gradodelibertad<-3
pprueba<-0.6
while(nmuestra<101)
{
  ereprueba<-pprueba*nmuestra
  ti<-rep(0, ereprueba)
  x1<-rep(0, ereprueba)
  x2<-rep(0, ereprueba)
  percentiles<-c(0,0)
  jota<-seq(1:ereprueba)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
  if(nmuestra==30) percentiles<-c(0.13413440, 0.08660024)
  else if(nmuestra==40) percentiles<-c(0.11879720, 0.07899061)
  else if(nmuestra==50) percentiles<-c(0.10584500, 0.07173009)
  else if(nmuestra==60) percentiles<-c(0.09728920, 0.06762456)
}

```

```

else if(nmuestra==80)percentiles<-c(0.08544459, 0.06103915)
else percentiles<-c(0.07695018, 0.05632796) #nmuestra=100
  if( nmuestra==30)set.seed(8)
else if( nmuestra==40)set.seed(18)
else if( nmuestra==50)set.seed(28)
else if( nmuestra==60)set.seed(38)
else if( nmuestra==80)set.seed(58)
else if( nmuestra==100)set.seed(78)
cuentorechazoB1<-0
cuentorechazoSPB1<-0
for( j in 1:nrep)
{
vecchisq<-sort(rchisq(nmuestra,gradodelibertad))
vecchisq1<-vecchisq[1:ereprueba]
estimogupta<-gupta(nmuestra,vecchisq1)
vecchisq2<-(vecchisq1-estimogupta[1])/estimogupta[2]
famiachis<-pnorm(sort(vecchisq2))
vector11<-(2/pi)*asin(famiachis^0.5)
  vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
  DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
  D11 <-max(abs(ti-famiachis))+(0.5/nmuestra)
    if(D11> percentiles[1])cuentorechazoB1<-cuentorechazoB1+1
if(DSP11> percentiles[2])cuentorechazoSPB1<-cuentorechazoSPB1+1
}
print(unlist(list( "n"=nmuestra,"grados de libertad"=gradodelibertad,"Cuento con
est D"=cuentorechazoB1,"Cuento con est DSP"=cuentorechazoSPB1)))
if( nmuestra<60)   nmuestra<-nmuestra+10
  else nmuestra<-nmuestra+40
}

```

Programa 5.13

Calcula la potencia de los tests D y DSP para una muestra censurada de tipo II a derecha de una normal de parámetros desconocidos y estimados por EMV. La razón de censura en este ejemplo se tomó como 0.6 y el nivel en 0.05.

```

set.seed(8)
nmuestra<-30
nrep<-10900
gradodelibertad<-3
pprueba<-0.6
while(nmuestra<101)
{
  ereprueba<-pprueba*nmuestra
  ti<-rep(0,ereprueba)
  x1<-rep(0,ereprueba)
  x2<-rep(0,ereprueba)
  percentiles<-c(0,0)
  jota<-seq(1:ereprueba)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
    if(nmuestra==30)percentiles<-c(0.13097540, 0.08383528)
      else if(nmuestra==40)percentiles<-c(0.11456270, 0.0746660)
      else if(nmuestra==50)percentiles<-c(0.10472850, 0.07246347)
      else if(nmuestra==60)percentiles<-c(0.09606223, 0.06742295)
      else if(nmuestra==80)percentiles<-c(0.08478965, 0.06227763)
      else percentiles<-c(0.0759717, 0.05731997) #nmuestra=100
        if( nmuestra==30)set.seed(8)
else if( nmuestra==40)set.seed(18)
else if( nmuestra==50)set.seed(28)
else if( nmuestra==60)set.seed(38)
else if( nmuestra==80)set.seed(58)
else if( nmuestra==100)set.seed(78)
cuentorechazoB1<-rep(0,nrep)
cuentorechazoSPB1<-rep(0,nrep)
cuentonula<-0
  DSP11<-rep(0,nrep)
  D11<-rep(0,nrep)
}

```



```

DSP112<-rep(0,nrep)
D112<-rep(0,nrep)
for( i in 1:nrep)
{
  vecchisq<-sort(rchisq(nmuestra,gradodelibertad))
  vecchisq1<-vecchisq[1:ereprueba]
  estimoEMV<-maxverobi4444(nmuestra,vecchisq1,-0.25)
  #para t -0,25
  if(is.numeric(estimoEMV[1]))
  {vecchisq2<-(vecchisq1-estimoEMV[1])/(estimoEMV[2])
  familiachis<-pnorm(sort(vecchisq2))
  vector11<-(2/pi)*asin(familiachis^0.5)
    vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
    DSP11[i]<-max(abs(vector11-vector22))
    D11[i] <-max(abs(ti-familiachis))+(0.5/nmuestra)
      if(D11[i]> percentiles[1])cuentorechazoB1[i]<-1
if(DSP11[i]> percentiles[2])cuentorechazoSPB1[i]<-1
}
else cuentonula<-cuentonula+1
}
print(unlist(list( "n"=nmuestra,"cuentonula"=cuentonula,"grados de
  libertad"=gradodelibertad,"Cuento con est
  D"=sum(cuentorechazoB1[1:10000]),"Cuento con est
  DSP"=sum(cuentorechazoSPB1[1:10000]))))
if( nmuestra<60) nmuestra<-nmuestra+10
  else if(nmuestra==60)nmuestra<-nmuestra+20
    else nmuestra<-nmuestra+20
}

```

Programa 5.14

Para cualquier razón de censura, calcula los estadísticos D y DSP para una muestra con censura de tipo II a derecha de una normal de parámetros desconocidos y estimados por Gupta. El `nmuestra` puede ser distinto de la longitud del vector.

```

calculoDDSPcensuraP<-function(nmuestra,mimuestra,ppru)
{
  pprueba<-ppru
  ereprueba<-pprueba*nmuestra
  ti<-rep(0,ereprueba)
  x1<-rep(0,ereprueba)
  x2<-rep(0,ereprueba)
  jota<-seq(1:ereprueba)
  ti<-(jota-0.5)/nmuestra
  vec<-sort(mimuestra)
  vec1<-vec[1:ereprueba]
  estimogupta<-gupta(nmuestra,vec1)
  vec2<-(vec1-estimogupta[1])/estimogupta[2]
  familia<-pnorm(sort(vec2))
  vector11<-(2/pi)*asin(familia^0.5)
    vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
    DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
    D11 <-max(abs(ti-familiachis))+(0.5/nmuestra)
  print("Valor calculado de D y de DSP censura tipoII,test normal censurada con
    Gupta")
  calculoDDSPcensuraP<-c(D11,DSP11)
  calculoDDSPcensuraP
}

```

Programa 5.15

Para cualquier razón de censura, calcula los estadísticos D y DSP para una muestra con censura de tipo II a la derecha de una normal de parámetros desconocidos y estimados por EMV. El `nmuestra` puede ser distinto de la longitud del vector.

```

calculoDDSPcensuraPEMV<-function(nmuestra,mimuestra,ppru)
{
pprueba<-ppru
ereprueba<-pprueba*nmuestra
ti<-rep(0,ereprueba)
x1<-rep(0,ereprueba)
x2<-rep(0,ereprueba)
jota<-seq(1:ereprueba)
ti<-(jota-0.5)/nmuestra
vec<-sort(mimuestra)
vec1<-vec[1:ereprueba]
estimoEMV<-maxverobiALL(nmuestra,vec1)
vec2<-(vec1-estimoEMV[1])/estimoEMV[2]
familia<-pnorm(sort(vec2))
vector11<-(2/pi)*asin(familia^0.5)
vector22<-(2/pi)*asin(ti^0.5)
DSP11<-max(abs(vector11-vector22))
D11 <-max(abs(ti-familia))+(0.5/nmuestra)
print("Valor calculado de D y de DSP censura tipoII,test normal censurada con EMV")
calculoDDSPcensuraP<-c(D11,DSP11)
calculoDDSPcensuraP
}

```

Apéndice 3.

Conjuntos de datos utilizados en el trabajo.

1. Muestra 1: muestra de tamaño 20 generada al azar de una distribución $N(0,1)$.

```
-0.40226922  2.27449005  1.59120915 -1.90030314 -0.10785046  0.15078783
 0.02344924 -0.71530549  1.15647364 -0.03760781  0.15418309 -0.61845595
 0.49129860 -0.06801488  0.17648248 -0.25010042 -0.30735420 -0.62848552
-0.22162140  2.46254797
```

2. Conjunto de datos NORDATA

Se resaltan los primeros cuarenta datos.

```
 92.55  96.20  84.27  90.87 101.58 106.82  98.70 113.75  98.98 100.42
118.52  89.90  92.45 115.92 103.61  96.13  95.45 108.52 112.69  90.03
111.56 109.26  83.67 112.97 116.87 102.56  79.43 105.48  85.29  83.53
104.21 100.75  92.02 100.10  87.83  89.00 108.67 103.09  99.12  91.46
125.28  91.45  92.56 102.66 101.91  76.35 111.30  89.33  79.89 110.17
111.38 103.22 113.17 108.39 103.60 103.90  89.35 124.60 104.34  85.29
 97.78 109.76  94.92  95.12  88.56 115.95 100.79 104.87  95.89 110.72
 86.28 107.97 117.23 104.12  95.97  88.13 102.98 103.71  95.14  85.71
103.56  89.44  88.26  97.80  97.33 103.90  96.38  94.33  99.62  95.94
104.89  83.34  87.04  89.80  83.07 112.14 113.90 100.46 110.39  98.43
```

Primeros cuarenta datos del conjunto NORDATA en la muestra ordenada.

```
 76.35  79.43  79.89  83.07  83.34  83.53  83.67  84.27  85.29  85.29
 85.71  86.28  87.04  87.83  88.13  88.26  88.56  89.00  89.33  89.35
 89.44  89.80  89.90  90.03  90.87  91.45  91.46  92.02  92.45  92.55
 92.56  94.33  94.92  95.12  95.14  95.45  95.89  95.94  95.97  96.13
```

3. Muestra T4 de tamaño 30 de una distribución t con 4 grados de libertad.

```
-1.48643507 -1.35243502 -0.35752359 -1.23948619  0.99228809 -0.13042048
-1.69780238  5.45202731 -1.92836444 -0.97194888 -0.94298419 -1.46448559
 1.21977656 -0.15862801  0.06866616  1.57452396 -0.20177640 -1.22454350
 2.28232615  0.56820650  0.60096639  0.25860105 -0.70513236  0.94029038
-0.52083895 -1.32607151 -0.23054343 -0.14619903  1.03654913  0.66974081
```

4. Pesos de pollos: pesos de 20 pollos de una raza, en gramos.

```
156 162 168 182 186 190 190 196 202 210 214 220 226 230 230 236 236 242 246 270
```

5. Muestra al azar de una distribución de la familia B con $k = 2$ de tamaño 40, denominada familiaB.

```
0.1156027  0.1184103  0.1540003  0.2347934  0.2360982
0.2924396  0.3034254  0.3056857  0.3118995  0.3296081
0.3404021  0.3506400  0.3603013  0.3771419  0.3811734
0.4085101  0.4101450  0.4273006  0.4566492  0.4570207
```

0.4701292 0.4756591 0.5097628 0.5357696 0.5410887
0.5862693 0.6086388 0.6143692 0.6172477 0.6248635
0.6519500 0.6699048 0.6718627 0.6813901 0.6875538
0.7891598 0.7960477 0.8012493 0.8206599 0.9689826

6. Conjunto de datos UNI que corresponde a los primeros 25 valores de una muestra de tamaño 100 de una distribución $U(0,10)$.

8.10 2.06 1.60 8.87 9.90 6.58 8.68 7.31 2.85 6.09 6.10 2.94 1.85 9.04 9.38
7.30 2.11 4.55 7.66 9.63 9.48 5.31 5.76 9.66 4.37

Los primeros 15 valores ordenados son:

1.60 1.85 2.06 2.11 2.85 2.94 4.37 4.55 5.31 5.76 6.09 6.10 6.58 7.30 7.31

7. Datos de Brown y Miller: conjunto de datos de fatiga biaxial reportados por Brown y Miller (1978). NC indica la variable que mide el número de ciclos hasta que ocurre la falla y la variable independiente W es el esfuerzo por ciclo. Se listan 46 observaciones.

W	NC	W	NC	W	NC	W	NC
11,5	3280	24	804	40,1	750	60,3	283
13	5046	24,6	1093	40,1	316	60,5	212
14,3	1563	25,2	1125	43	456	62,1	327
15,6	4707	25,5	884	44,1	552	62,8	373
16	977	26,3	1300	46,5	355	66,5	125
17,3	2834	27,9	852	47,3	242	67	187
19,3	2266	28,3	580	48,7	190	67,1	135
21,1	2208	28,4	1066	52,9	127	67,9	245
21,5	1040	28,6	1114	56,6	185	68,8	137
22,6	700	30,9	386	59,9	255	75,4	200
22,6	1583	31,9	745	60,2	195	100,5	190
24	482	34,5	736				

Datos de fatiga biaxial con censura de tipo II y 37 primeras observaciones completas en la muestra ordenada para la variable NC.

125	195	327	700	1040
127	200	355	736	1066
135	212	373	745	1093
137	242	386	750	1114
185	245	456	804	1125
187	255	482	852	
190	283	552	884	
190	316	580	977	

Referencias bibliográficas

- [1] Ahmed S. M. and Hala M. K. (2005) "A New Modified Goodness of fit tests for Type 2 Censored Simple from Normal Population". Mathematical and Computational Applications, Vol. 10, No. 2, pp. 165-177, 2005.
- [2] Ali M. and Chan L. K. (1964) "On Gupta estimates of the parameters of the normal distribution". Biometrika, 51, 498-501.
- [3] Anderson T. W. and Darling D. A. (1952) "Asymptotic Theory of Certain Goodness of Fit Criteria based on Stochastic Processes". Annals of math. Statistics 23, 193-212.
- [4] Anderson T. W. and Darling D. A. (1954) "A test of goodness of fit". J. Amer. Statist. Assoc., 49, 765-769.
- [5] Barr D. R. and Davidson T. (1973) "A Kolmogorov-Smirnov Test for Censored samples". Technometrics, vol. 15, N° 4, 739-757.
- [6] Blom G. (1958). Statistical estimates and Transformed Beta Variates. New York, Wiley.
- [7] Birnbaum Z. W. (1953) "On the power of a one-sided test of fit for continuous probability functions". The Annals of Statistics, 3, 1038-1069.
- [8] Brown M. W. and Miller K. J. (1978) "Biaxial fatigue data". Report CEMR1178, University of Sheffield. Department of mechanical engineering.
- [9] Burden R. and Douglas Faires J. (1985) Análisis Numérico. Grupo Editorial Iberoamérica.
- [10] Cohen A. C. (1991) Truncated and Censored Samples, Theory and Applications. Marcel Dekker.
- [11] Conover W. J. (1999) Practical Nonparametric Statistics. Third Edition. John Wiley & Sons.
- [12] Cramer H. (1928) "On the composition of elementary errors". Skandinavisk Aktuarietidskrift, 11, 13-74, 141-180.
- [13] D'Agostino R. B. and Stephens M. A. (1986) Goodness of Fit Techniques. Marcel Dekker.
- [14] Dufour R. and Maag U.R. (1978) "Distribution Results for Modified Kolmogorov-Smirnov Statistics for Truncated or Censored Samples". Technometrics, vol. 20, N°1, 29-32.
- [15] Durbin J. (1973) "Distribution Theory for Tests based on the Sample Distribution Function". Regional Conference series in Appl. Math., N° 9, SIAM, Philadelphia, Pa.
- [16] Durbin J. (1973) "Distribution Theory for Tests based on the Sample Distribution Function". Regional Conference series in Appl. Math., N° 9, SIAM, Philadelphia, Pa.
- [17] Durbin J., Knott M. and Taylor C. C. (1975). "Comparison of Cramer-von Mises statistics", II J. Royal Statist. Soc., B 37, 216-237.
- [18] Espinosa E., Cantú M. y Leiva V. (2004) "Caracterización y aplicación de la distribución de Birnbaum-Saunders como modelo de tiempos de vida". Revista Agraria, Nueva Época, Año 1, Vol. 1, N° 1, Buenavista, Saltillo, México.
- [19] Fisz M. (1963) Probability Theory and Mathematical Statistics. Third Edition. John Wiley & Sons.
- [20] Gupta A. K. (1952) "Estimation of the Mean and Standard Deviation of a Normal Population from a Censored Sample". Biometrika, 39, 260-273.

- [21] Harter H. L. (1961) "Expected values of normal order statistics". *Biometrika*, 48, 151-466.
- [22] Klein J. and Moeschberger M. (1977). *Survival Analysis, Techniques for Censored and Truncated Data*. Springer.
- [23] Kolmogorov, A. N. (1933) "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione". *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, 4, 83-91.
- [24] Knott M. (1970) "The small sample power of one sided Kolmogorov tests for a shift in location of the normal distribution". *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1384-1391.
- [25] Koziol J. A. and Byar D. P. (1975). "Percentage points of the asymptotic distributions of one and two samples k-s statistics for truncated or censored data". *Technometrics* 17, 507-510.
- [26] Kuiper, N. H. (1960) "Tests concerning Random Points on a Circle". *Proc. Koninkl. Neder. Akad. van Wetenschappen*, A 63, 38-47.
- [27] Lilliefors, H. W. (1967) "On the Kolmogorov-Smirnov test for Normality with Mean and Variance Unknown". *J. Am Assoc.*, 62, 399-402.
- [28] Mason A. L. and Bell C. B. (1986) "New Lilliefors and Srinivasan tables with applications". *Communications in Statistics-Simulation*, 15, 451-467.
- [29] Martynov G. V. (1976) "Computation of limit distributions of statistics for normality tests of type w squared". *Theory Probability Appl.* 21, 1-13.
- [30] Michael J. R. (1983) "The Stabilized Probability Plot". *Biometrika*, Vol. 70, n° 1, 11-17.
- [31] Michael J. R. and Schucany W. R. (1979) "A new approach to testing goodness-of-fit for censored samples". *Technometrics*, 21, 435-441.
- [32] Michael J. R. and Schucany W. R. (1986) "Analysis of data from censored samples" In D'Agostino Ralph B. and Stephens Michael A. (1986) *Goodness of Fit Techniques*. Marcel Dekker.
- [33] Nelson W. (1973) "Analysis of residuals from censored data". *Technometrics*, 15, 697-715.
- [34] Nelson W. (1982) *Applied Life Data Analysis*. Wiley. New York.
- [35] Pearson K. (1900) "On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can reasonably be supposed to have arisen from random sampling". *Philosophical Magazine*, 50 (5), 157-175. (Reprinted 1948 in Karl Pearson's early statistical papers, ed. by E. S. Pearson, Cambridge University Press).
- [36] Pearson E. S. and Hartley H. O. (1972) "Biometrika Tables for Statisticians", Vol. 2. New York, Cambridge University Press.
- [37] Pettitt A. N. (1976) "Cramer-von Mises statistics for testing normality with censored samples". *Biometrika*, 63, 475-481.
- [38] Pettitt A. N. and Stephens M.A. (1976) "Modified Cramer-von-Mises statistics for censored data". *Biometrika*, 63, 291-298, 1976.
- [39] Proschan F. (1963) "Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate". *Technometrics*, 5, 375-383.
- [40] Sarhan A. E. and Greenberg B. G. (1956) "Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples Part I. The normal distribution up to size 10". *Ann. Math. Statistics*, 27, 427-451 (correction), 40, 325.

- [41] Sarhan A. E. and Greenberg B. G. (1958) "Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples Part II. The normal distribution of size 11 to 15". Ann. Math. Statistics, 29, 79-105.
- [42] Shapiro S. S. and Wilk M. B. (1965) "An analysis of variance test for normality (Complete samples)". Biometrika, 52, 591-611.
- [43] Shapiro S. S., Wilk M. B. and Chen H. J. (1968) "A comparative study of various tests for normality". Journal of the American Statistical Association, 63, 1343-1372.
- [44] Smirnov N.V. (1936) "Sui la distribution de W^2 Criterium de M. R. von Mises)". Comptes Rendus (Paris), 202, 449-452.
- [45] Smirnov N.V. (1939) "Estimate of deviation between empirical distribution functions in two independent samples". Bulletin Moscow University, 2 (2), 3-16.
- [46] Smirnov N.V. (1948) "Table for estimating goodness of fit of empirical distributions". The Annals of Mathematical Statistics, 19, 279-281(6.1).
- [47] Stevens W. L. (1937) "The truncated normal distribution". Ann Appl. Biol., 24, 815-852.
- [48] Stephens M. A. (1971) "Asymptotic results for goodness-of-fit statistics when parameters must be estimated". Technical Reports 159, 180, Department of Statistics, Stanford University.
- [49] Stephens M. A. (1974) "EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons". Journal of American Statistical Association, Vol. 69, Number 347, 730-737.
- [50] Stephens M. A. (1976) "Asymptotic results for goodness-of-fit statistics with unknown parameters". Ann. Statist. 4, 357-369.
- [51] Stephens M. A. (1986) "Tests based on EDF Statistics" In D'Agostino R. B. and Stephens M. A. (1986) Goodness of Fit Techniques. Marcel Dekker.
- [52] Stephens M. A. and Maag U. R. (1968) "Further percentage points for W_N^2 ". Biometrika, 55, 428-430.
- [53] von Mises R. (1931) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik. F. Deuticke, Leipzig.
- [54] Wald A. and Wolfowitz J. (1939) "Confidence limits for continuous distribution functions". The Annals of Mathematical Statistics, 10, 105-118.
- [55] Watson, G. S. (1961) "Goodness of fit tests on a circle". Biometrika, 48, 109-114.